Structures symplectiques sur les espaces de superlacets

Nicolas Bovetto

Numéro d'ordre : 328-2011 Année 2011

Université Claude Bernard - Lyon 1

Institut Camille Jordan - CNRS UMR 5208
École doctorale InfoMaths

Thèse de doctorat

Spécialité : Physique-Mathématique

présentée par

Nicolas BOVETTO

Structures symplectiques sur les espaces de superlacets

Thèse dirigée par Claude Roger

soutenue publiquement le 19 décembre 2011 devant le jury composé de :

M. Damien CALAQUE	Professeur Assistant à l'ETH Zurich	Co-directeur
M. François DELDUC	DR, ENS Lyon	Examinateur
M. Camille LAURENT-GENGOUX	Pr, Université Paul Verlaine - Metz	Rapporteur
M. Claude ROGER	Pr, Université Lyon1	Directeur
M. Vladimir ROUBTSOV	Pr, Université d'Angers	Rapporteur
M. Thomas STROBL	Pr, Université Lyon1	Examinateur

Résumé. —
Le but initial de cette thèse était d'étudier les espaces de superlacets, version géométrique des espaces de supercordes en Physique. Le point de départ était alors d'étendre les résultats de classifications de l'article de Oleg Mokhov : *Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems* au cadre de la supergéométrie. Dans cet article l'auteur établit une classification des formes symplectiques locales homogènes d'ordre 0, 1 et 2 sur l'espace des lacets $LM = C^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ à partir d'objets géométriques sur la variété différentiable M. Dans cette thèse, on remplace la variété M par une supervariété $M^{p|q}$ et le cercle $\mathbb{S}^1$ par un supercercle $\mathbb{S}^{1|n}$ et l'on étudie l'espace des morphismes de supervariétés $Mor(\mathbb{S}^{1|n}, M^{p|q})$.

Dans les deux premières parties, l'on définit les structures géométriques classiques et super des espaces de superlacets. Pour ce faire, l'on se restreint aux deux supercercles $\mathbb{S}^{1|1}$ et en s'inspirant des travaux sur LM, l'on détermine une structure de variété de Fréchet des espaces de superlacets $SLM = Mor(\mathbb{S}^{1|1}, M)$. Puis l'on introduit la structure super qui nous a semblé la plus naturelle sur SLM en terme de faisceaux. Afin de pouvoir travailler en coordonnées, l'on introduit la structure super par un autre point de vue en considérant l'espace de superlacets SLM comme le foncteur de points $\underline{SLM}$. De plus, en interprétant les calculs de Mokhov en terme de jets, ceci nous permet d'une part d'apporter une justification rigoureuse aux-dits calculs et d'autre part, d'obtenir une généralisation directe des méthodes de calculs en coordonnées ("à la physicienne").

Le troisième chapitre expose les résultats de classification obtenus. Comme dans le cas classique, on obtient un théorème de dépendance limitée de l'ordre des jets qui interviennent dans les formes d'ordre 0 et 1. Puis, on obtient une classification des formes d'ordre 0 au moyen de formes différentielles sur la supervariété $M^{p|q}$. Une classification des formes homogènes d'ordre 1 et 2 au moyen de métriques Riemaniennes et de connexions sur $M^{p|q}$.

Enfin le quatrième chapitre est consacré à la généralisation des résultats d'un autre article de O. Mokhov : *Complex homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds and their cohomology groups*. De par la présence de la variable impaire, on précise tout d'abord la définition des formes homogènes locales sur SLM, puis on démontre que muni de la différentielle extérieure, l'espace des formes homogènes sur SLM d'ordre $m \in \mathbb{N}$ donné définit un complexe. On calcule alors complètement les espaces de cohomologie pour les ordres $m = 0$ et 1, partiellement pour les ordres 2 et 3 et on explicite ainsi les formes symplectiques exactes obtenues au troisième chapitre.

Mots clefs. — Supergéométrie, espace de lacets, variété de Fréchet, jets, foncteur de points, cohomologie.

Abstract. —
The goal of the thesis was to study superloopspaces, the geometric version of superstrings in Physics, by extending the classification results contained in Oleg Mokov's paper : *Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems* to the supergeometric setting. In it, lies the classification of local homogeneous symplectic forms of order 0, 1 and 2 on the loopspace $LM = C^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ by means of geometric objects on the manifold M. In this thesis, the manifold M becomes a supermanifold $M^{p|q}$, the circle $\mathbb{S}^1$ becomes a supercircle $\mathbb{S}^{1|n}$ and we consider the superloopspace as the space of morphisms of supermanifolds $Mor(\mathbb{S}^{1|n}, M^{p|q})$.

In the two first chapters, we look at the classical and super geometric structures of the superloopspaces. To do this, we restrict ourselves to the two supercircles $\mathbb{S}^{1|1}$ and using the previous works on LM, we define a Fréchet manifold structure on the superloopspaces $SLM = Mor(\mathbb{S}^{1|1}, M)$. Then we bring in what we consider as the most natural superstructure on SLM by means of sheaves. In order to work with coordinates, we adopt another point of view considering SLM as the functor of points $\underline{SLM}$. Moreover, rewriting Mokhov results in terms of jets allows us to give a rigorous proof of those calculations and also to extend right away the methods of calculations in coordinates.

The third chapter contains the new classification results we obtained. Similarly to the classical case, we first show that the order of the jets in the forms of order 0 and 1 is bounded. Then we give the complete classification of the symplectics forms of order 0 by means of differential forms on the manifold $M^{p|q}$ and of homogeneous symplectics forms of order 1 and 2 using Riemannian metrics and connections on $M^{p|q}$.

Finally, the fourth chapter is devoted to extending the cohomology results of an other Mokhov's article : *Complex homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds and their cohomology groups*. We first discuss the dependance of the odd variable in the homogeneous forms on SLM, and show that with the exterior derivative, the space of homogeneous forms on SLM of a given order $m \in \mathbb{N}$ is a complex. We then calculate the cohomological spaces, completely for the order $m = 0$ and 1, partially for the order 2 and 3 and we identify the exact forms amongst those of the third chapter.

Key words. — Supergeometry, loops space, Frechet manifold, funtor of points, cohomology.

REMERCIEMENTS

Cette thèse fut une longue épreuve. Les premières années ne furent pas très studieuses et les deux dernières demandèrent un investissement et des efforts considérables afin de rattraper le retard. Si ce travail voit aujourd'hui le jour, c'est grâce à l'aide de plusieurs personnes, avant et pendant la thèse, que j'aimerais remercier ici. C'est d'ailleurs avec un immense plaisir que j'écris les lignes qui suivent dont la maladresse ne rend pas de manière fidèle les sentiments de reconnaissance que j'éprouve.

Tout d'abord je tiens à remercier mon directeur de thèse, Claude Roger, de m'avoir laissé la possibilité de définir moi-même mon sujet de thèse parmi toutes les pistes d'études intéressantes des espaces de super-lacets qu'il proposait. Ce fut une expérience intense et enrichissante! Ses encouragements furent d'un grand soutien dans les périodes difficiles. L'aide de Damien Calaque a toutefois était indispensable pour arriver à ce que cette thèse est aujourd'hui. Je lui dois notamment la partie sur les espaces de jets qui a permis une approche rigoureuse du sujet. Les quelques séances passées ensemble furent certainement les moments les plus passionants de ma très courte vie de chercheur et je l'en remercie très sincèrement!

Je tiens aussi à remercier grandement mes rapporteurs, les Professeurs Vladimir Roubtsov et Camille Laurent-Gengoux qui ont accepté ce rôle dans des conditions difficiles et inhabituelles. Ce fut un grand honneur de recevoir leurs remarques, leurs critiques et surtout leurs encouragements. Dans cette période difficile de fin de thèse, le crédit qu'ils apportèrent à mon travail fut comme un second souffle et il est difficile de trouver les mots justes pour leur exprimer mon immense reconnaissance.

J'ai été très honoré de la présence du Professeur François Delduc en tant que membre du jury et je l'en remercie grandement. J'espère sincèrement avoir l'occasion de poursuivre mon travail dans les directions qu'il m'a conseillées.

Je remercie aussi grandement le Professeur Thomas Strobl à qui je dois beaucoup. Je suis très honoré qu'il ait accepté de faire partie de mon jury mais surtout j'aimerais lui exprimer toute ma reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de la thèse. Des pistes de recherches passionantes que je n'ai pas eu le temps d'exploiter aux financements des conférences à l'ESI, un lieux incroyable pour faire de la Recherche, en passant par tous les séminaires, groupes de travail et conférences qu'il a organisés, toutes ses actions ont joué un rôle capital pour ma progression scientifique et je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Un grand merci aussi aux Professeurs Kenji Ioara, Valentin Ovsienko et Serge Parmentier. Ce fut toujours une grande joie de les croiser et de discuter avec eux, de mathématiques comme d'autres choses ainsi que de participer aux groupes de travail et séminaires qu'ils organisaient. Un grand merci pour leur gentillesse.

Un merci tout spécial pour Jean-Phillipe, pour nos "super"-discussions. Ma motivation pour la super-géométrie a littéralement été boostée par son arrivée au laboratoire.

Un merci tout particulier pour Pierre Crépel pour sa gentillesse, sa générosité, sa bonne humeur, son sens de l'humour. Nos discussions furent toujours un grand apaisement et une grande joie dans ce tumulte mathématique!

Ces cinqs années passées au sein de l'Institut Camille Jordan furent très agréables et je tiens à remercier tous ses membres et personnels pour leur gentillesse. Plus particulièrement, je tiens à remercier tous les thésards avec qui j'ai pu discuter, me détendre et surtout rire : Alexander, Alina, Amélie, Antoine, Frédéric, Ion, Jean, Julien, Magalie, Marianne, Mickaël, Thomas, Valérie.

Je tiens à remercier aussi les personnes qui ont joué un rôle capital dans mon développement mathématique. Je suis très heureux d'avoir eu la chance d'être l'élève de Mme Bouchy et de Mr Chardon, des professeurs formidables qui ont su cultiver mon goût pour les mathématiques. J'ai toujours regretté de ne pas pouvoir passer plus de temps en classe avec eux chaque semaine.

Un merci spécial pour le Professeur Joël Merker. C'est lui qui m'a initié à la Recherche en Mathématiques, à la rigueur de rédaction (qui ne transparaît malheureusement pas dans ce manuscrit), à l'aspect historique et philosophique des Mathématiques. C'est lui qui m'a montré à quel point les Mathématiques sont à la fois fascinantes et frustrantes. C'est lui qui a ouvert la voie qui a conduit à ce manuscrit!

Un grand merci aux mathématiciens qui sont devenus des amis : Fred, Gaëlle, Laurent et Vladimir pour le soutien et la joie qu'ils m'ont apportés ainsi que Rémy qui est une personne formidable et avec qui j'ai eu les discussions mathématiques les plus palpitantes, dont certaines furent capitales pour mener à bien cette thèse. Ce fut toujours un très grand plaisir de le voir détruire mes idées farfelues et me ramener sur les chemins de la géométrie algébrique!

Un grand merci à mes amis Alexandre, Aurélie, Cristina, Sabrina pour leur amitié sincère qui m'est si précieuse.

Une infinie reconnaissance pour mes amis Olivier, James et Shirley qui m'ont soutenu pendant les moments très difficiles et sur qui je sais que je pourrai toujours compter.

Un très grand merci à toute ma famille! Pour leur soutien, leur réconfort, leurs encouragements! Notamment je suis infiniment reconnaissant envers mes parents Paule et Lionel pour leur aide (déjà bien avant la thèse) qui s'est révélée indispensable et pour avoir toujours cru en moi. Savoir que je pouvais toujours compter sur eux a toujours été très important pour moi!

Je tiens aussi à remercier Sergey et Natacha pour leurs encouragements, leur gentillesse et leur soutien. Je suis très heureux d'avoir fait leur connaissance!

Enfin, un infini merci à ma petite Polina adorée. C'est grâce à elle que j'ai pu trouver la force de mener à bien cette thèse et je n'en serais pas là, et si heureux, si elle n'était pas entrée dans ma vie.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La géométrie symplectique constitue un substrat naturel de la mécanique analytique (voir [**GR07**], lui même inspiré de [**Sou85**] et [**Arn89**]). Dans le cas d'une particule dans une variété M différentiable, la donnée d'une structure symplectique sur le fibré tangent TM appelé aussi espace des configurations détermine la dynamique de celle-ci et l'espace des phases est donné par le fibré cotangent, naturellement muni d'une structure symplectique. En théorie des cordes (cf [**Zwi09**]), l'on remplace une particule ponctuelle par un lacet c'est à dire une application C^∞ du cercle $\mathbb{S}^1$ dans M. Dans ce cas, la variété de dimension finie M est remplacée par la variété de Fréchet $LM = C^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ de dimension infinie. De ce point de vue, il est donc naturel de rechercher des structures symplectiques sur les espaces de lacets LM.

Les travaux fondamentaux sur ces questions sont ceux de Oleg. I. Mokhov, que l'on trouve notamment dans *Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifold* [**Mok98b**]. Dans cet article, ainsi que dans [**Mok95**], l'auteur établit une classification des formes symplectiques locales sur LM d'ordre 0 et d'ordre 1 et 2 dans le cas homogène, au moyen d'objets purement géométriques sur la variété M. Il démontre aussi comment ces structures symplectiques engendrent des représentations hamiltoniennes des équations du mouvement de σ-modèles ou de systèmes de type hydrodynamique et permettent ainsi de démontrer leur intégrabilité.

En physique quantique, on distingue deux types de particules : les fermions et les bosons. La fonction d'onde qui correspond à un système de deux fermions identiques est antisymétrique (voir [**BD05**]) : ceci est à l'origine du principe d'exclusion de Pauli. La Relativité Générale quant à elle suggère une approche géométrique de la physique. De manière à donner une interprétation géométrique aux fermions, les physiciens ont alors considéré des fonctions à valeurs dans des algèbres de Grassman (voir [**Var04**]). La supergéométrie était née, encore fallait-il lui donner une cohérence mathématique. C'est au mathématicien russe Felix A. Berezin que revient le titre de père des supermathématiques (voir[**Rog06**], [**Min96**], [**Shi07**]). Plusieurs de ses élèves dont Dimitry A. Leites (voir [**Lei80**], [**Lei83**]) et plusieurs chercheurs de l'école russe dont Yuri I. Manin (voir [**Man88**]), ont par la suite développé de manière considérable la supergéométrie suivant les principes de la géométrie algébrique. Une autre approche de la supergéométrie, à l'aide de supernombres, a été développé par le physicien Bryce DeWitt [**DeW92**] et la mathématicienne Alice Rogers [**Rog07**]. Marjory Batchelor a montré que ces deux approches sont équivalentes [**Bat80**]. Dans la suite, l'on n'utilisera que la première.

En supergéométrie, la notion de variété se généralise en celle de supervariété ([**Lei80**], [**Lei83**], [**BBHR91**]). Une supervariété M est une variété $\overline{M}$ munie d'un faisceau d'algèbres localement isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_{\overline{M}} \otimes \Lambda[\xi_1, \cdots, \xi_q]$ où $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ est le faisceau structural de la variété $\overline{M}$ et $\Lambda[\xi_1, \cdots, \xi_q]$ une algèbre grassmanienne de dimension q, c'est-à-dire l'algèbre engendrée par les ξ_i pour $i = 1, \cdots, q$ et les relations $\forall i, j \in [1, q], \quad \xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$. Une supervariété M aura donc une dimension paire p qui sera celle de la variété $\overline{M}$, c'est-à-dire $p = dim(\overline{M})$ et une dimension impaire q qui est la dimension de l'algèbre grasmanienne. On notera parfois $M^{p|q}$ pour indiquer les dimensions. De plus, à toute supervariété $M^{p|q}$, on peut associer de manière fonctorielle mais non canonique un fibré de rang q au dessus de $\overline{M}$, c'est le théorème de Batchelor [**Bat79**]. Dans cette thèse, ce théorème n'est pas utilisé et l'on préfère travailler avec des systèmes de coordonnées sur les supervariétés.

L'idée de la théorie des supercordes ([**Zwi09**]) est donc d'introduire de la supergéométrie dans la théorie des cordes. On ne regarde plus des lacets mais des superlacets, c'est-à-dire des applications C^∞ (ou morphismes de supervariétés) d'un supercercle $\mathbb{S}^{1|n}$ dans une supervariété $M^{p|q}$. Le but de cette thèse est donc d'étudier les structures symplectiques locales sur les espaces de superlacets afin d'obtenir des résultats de classifications similaires. S'il est possible de généraliser le formalisme en coordonnées utilisé par Mokhov au cas de n'importe quel espace de superlacets au moyen de la notion de foncteur de point (voir partie 2.4), la difficulté des calculs a rapidement imposé de se limiter au cas des superlacets où le supercercle est un des deux supercercles $\mathbb{S}^{1|1}$ de dimension impaire égale à 1.

Cette thèse se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre est un chapitre de rappels. Dans un premier temps, on rappelle les résultats de classification que l'on va étendre au cas super. Pour cela, on introduit des notations analogues à celles de Mokhov dans son article [**Mok98b**], sans les interpréter encore en termes de jets. Toute forme symplectique ω locale d'ordre $s \in \mathbb{N}$ s'écrit localement (cf plus bas) pour tous champs de vecteurs $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$ sur LM :

$$\omega(X, Y) = \int_{\mathbb{S}^1} X^i Y^j_{(t)} \omega^t_{ij}(x) dx$$

où

(i) x est la variable sur le cercle,
(ii) $\forall t > s$, $\omega^t_{ij} = 0$ et les ω^s_{ij} sont les coordonnées d'un 2-tenseur inversible,
(iii) $Y^j_{(t)} = \dfrac{d^t Y}{dx^t}$,
(iv) Et les coefficients ω^t_{ij} ne dépendent que de x, des x^i et d'un nombre fini de leurs dérivées $x^i_{(s)}$.

Le terme "localement" ici est à préciser. La formule précédente n'a à priori de sens que pour des lacets suffisamment petits pour être contenus dans une carte locale de la variété M munie d'un système de coordonnées x^i. Pour des lacets qui ne sont pas contenus dans un ouvert de carte U, par compacité de $\mathbb{S}^1$, on peut trouver un recouvrement fini par des ouverts de cartes de M de l'image du lacet. On conserve alors l'écriture précédente en imposant la covariance de l'intégrande dans un changement de coordonnées sur la variété M.

Dans [**Mok98b**], Mokhov démontre que les formes d'ordre 0 ne dépendent pas des dérivées $x^i_{(s)}$ pour $s \geq 2$. Dans cette thèse l'on montre que les formes d'ordre 1 ne dépendent pas des dérivées $x^i_{(s)}$ pour $s \geq 4$. Cependant pour les ordres plus grand que

0, Mokhov classifie seulement les formes locales homogènes et nous n'avons pas réussi à établir une classification complète des formes d'ordre 1. Ses résultats sont les suivants :

(i) Les formes d'ordre 0 sont classifiées par une famille de 2-formes sur M paramétrée par S^1 et une 3-forme fermée sur M (Théorème 1.11).

(ii) Les formes homogènes d'ordre 1 sont classifiées par les couples (g, ∇) où g est une métrique riemanienne sur M et ∇ une connexion compatible avec g , c'est-à-dire $\nabla g = 0$, telle que la torsion sous forme covariante soit une 3-forme fermée (Théorème 1.13).

(iii) Les formes homogènes d'ordre 2 sont classifiées par les couples (ω, ∇) où ω est une forme presque symplectique sur M et ∇ une connexion symplectique, c'est-à-dire $\nabla\omega = 0$ (Théorème 1.14).

Ensuite, l'on explicite la structure de Fréchet de LM telle qu'elle est présentée dans l'article d'Andrew Stacey [**Sta05**] afin de pouvoir expliciter la structure de variété de Fréchet des espaces de superlacets. A l'aide d'une addition locale, l'on définit pour chaque lacet γ une carte locale contenant γ et modelée sur les espaces de Fréchet $\Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM)$.

Dans un deuxième temps, on expose les résultats de bases de superalgèbre et de supergéométrie (voir [**Lei80**], [**BBHR91**], [**Man88**]) nécessaires pour étendre les résultats précédents au cas super.

On choisit de travailler avec les notations de Tuynman (voir [**Tuy10**]) pour les formes différentielles : leur évalutation en des champs de vecteurs sera écrite comme un produit intérieur.

Le paragraphe sur les superfibrés est quant à lui capital pour déterminer la nature géométrique des espaces de superlacets. On définit un superfibré au-dessus d'une supervariété M comme un faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres. L'approche faisceautique permet de travailler en coordonnées et ainsi d'identifier un fibré d'après les lois de transformation de ses sections. Si l'on choisit une projection d'une supervariété M sur sa variété sous-jacente $\overline{M}$, on peut définir à partir de tout superfibré E au-dessus de M, de nouveaux superfibrés sur M que l'on note E_0, E_1 et E^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ainsi que des fibrés sur $\overline{M}$, noté $\widetilde{E^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ qui permettent alors de donner une interprétation géométrique classique des espaces de superlacets lorsque le supercercle est $\mathbb{S}^{1|1}$.

Le deuxième chapitre est conceptuellement le noyau dur de cette thèse puisque c'est dans celui-ci que sont définis les espaces et superespaces de superlacets. En effet, il n'y a pas qu'une seule structure super possible pour le superespace des superlacets et les deux présentées ici répondent aux deux critères suivant :

(i) Etre la plus naturelle possible.
(ii) Pouvoir définir les formes symplectiques locales sous la forme :

$$\omega(X,Y) = \int_{\mathbb{S}^{1|n}} X^i Y^j_{(t,\beta)} \omega^{t,\beta}_{ij}(x) dx d\theta^1 \cdots d\theta^n$$

où
- les θ^i sont les variables impaires sur le supercercle $\mathbb{S}^{1|n}$,
- $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ est un multi-indice de taille n tel que $\beta_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

– et $Y^j_{(t,\beta)} = \dfrac{\partial^{t+|\beta|} Y^j}{(\partial x)^t (\partial \theta^1)^{\beta_1} \cdots (\partial \theta^n)^{\beta_n}}$.

Dans un premier temps, on donne quelques exemples d'espaces de superlacets : lacets dans une supervariété, superlacets dans une variété, $\mathbb{S}^{1|1}$ et $\mathbb{S}^{1|2}$-superlacets dans une supervariété. Sur ces exemples, on observe que si la dimension impaire du supercercle (trivial) est supérieure à 1, alors un superlacet se décrit comme un jet de champ de vecteurs le long du lacet sous-jacent (voir la formule exponentielle de Hélein [**Hél08**]). Par contre, dans le cas d'un supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$, trivial ou tordu, on peut donner une interprétation purement géométrique en terme de fibré classique. Ceci s'explique notamment par le fait que les fibrés associés dans le théorème de Batchelor sont dans ce cas, canoniques. Ils sont isomorphes aux deux fibrés en droites au-dessus de $\mathbb{S}^1$, voir §2.2.1.

A l'aide des résultats sur les superfibrés du chapitre 1, pour tout superfibré E au-dessus de $\mathbb{S}^{1|1}$, on définit deux fibrés au-dessus de $\mathbb{S}^1$, l'un impair E_{01} et l'autre pair E_{11} qui correspondent respectivement aux parties paires et impaires du fibré sous-jacent $\overline{E}$, de parité décalée, et tordues dans le cas du supercercle non trivial.

On obtient alors la proposition suivante :

***Proposition* (2.4).** — *Un superlacet $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M$ est donné par un couple $(\overline{\gamma}, \lambda)$ avec*

$$\overline{\gamma} \in L\overline{M}$$
$$\lambda \in \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^* TM)_{11}$$

A l'aide de supercourbes, on détermine alors l'espace tangent de l'espace des superlacets, que l'on note maintenat SLM. Comme dans le cas classique, on a :

***Proposition* (2.8).** — *Soit $\gamma \in SLM$.*

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^{1|1}}(\gamma^* TM)$$

en tant que superespace.

Et de manière à définir une structure de variété de Fréchet sur SLM, ainsi que la structure super, on montre que l'on a aussi, avec $\pi : TM \to M$ la projection canonique :

***Proposition* (2.9).** — *Soit $\gamma \in SLM$.*

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}[(\overline{\gamma}^*(TM))_0 \oplus (\gamma^*(Ker(d\pi)))_{11} \oplus (\overline{\gamma}^*(TM))_1 \oplus (\gamma^*(Ker(d\pi)))_{01}]$$

La structure de Fréchet est alors modelée sur les espaces $\Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^* TM)_0 \oplus (\overline{\gamma}^* TM)_1 \otimes \mathcal{L})$ à la place de $\Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^* TM)$ dans le cas classique où $\mathcal{L}$ est le fibré en droite associé au superlacet $\mathbb{S}^{1|1}$ càd si le supercercle est le supercercle trivial, $\mathcal{L}$ est le fibré en droite trivial au-dessus de $\mathbb{S}^1$, sinon il s'agit du fibré en droite tordu càd une bande de Moebius.

On introduit alors un faisceau de supermodules sur la variété de Fréchet SLM, le faisceau

$$\mathcal{O}_{\overline{SLM}} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}}} \Omega^*(\overline{M}))^L$$

de manière à retrouver les variables impaires de l'espace tangent de SLM. On renvoie au paragraphe 2.3.1 pour une définition du faisceau précédent.

Si cette approche permet une description géométrique de la supervariété SLM, elle n'offre pas un cadre calculatoire simple pour mener à bien les résultats de classification que l'on veut établir. On définit alors l'espace des superlacets comme le foncteur de points $\underline{SLM}$ (voir [**DEF**$^+$**99**], [**Dum08**]) de la catégorie des supervariétés **SM** dans celle des ensembles **Set** tel que pour toute supervariété S,

$$\underline{SLM}(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SM}}(S \times \mathbb{S}^{1|1}, M)$$

Cette approche sera fondamentale dans la conclusion des théorèmes du chapitre 3. En effet, comme un superlacet $\gamma \in SLM$ envoie une section de $\mathcal{O}_M$ sur une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}}$, les conclusions sur les quantités géométriques sur M qui interviennent dans l'expression en coordonnées des formes locales se fait seulement modulo $\mathcal{N}^2$ où $\mathcal{N}$ est le faisceau des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_M$ (voir 3.1.2). Dans le cadre du foncteur de point, un superlacet évalué en un S-point envoie de manière fonctorielle une section de $\mathcal{O}_M$ sur une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}\times S}$, ce qui permet de conclure complètement.

La fin de ce chapitre est consacrée aux espaces de jets (voir [**Pau10**]) qui sont le cadre naturel de l'analyse en dimension infinie des papiers de Mokhov. Les espaces de jets permettent d'une part de retrouver les fonctionnelles, les champs de vecteurs et le complexe des formes différentielles introduits par Mokhov et ses prédécesseurs, et d'autre part ils permettent une généralisation immédiate de ces notions dans le cas super en termes du foncteur de points, et ce pour tout espace de superlacets quel que soit le supercercle choisi. En fait, cette partie est principalement l'adaptation des espaces de jets en théorie des champs au cas des superlacets. De plus, les formes volumes sur le supercercle $\mathbb{S}^{1|n}$, qui interviennent dans l'expression intégrale des fonctionnelles, apparaissent de manière naturelle en considérant la structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|n}}$-module à gauche de l'algèbre des jets (voir [**Kas03**]).

Le troisième chapitre quant à lui contient les résultats de classification des formes symplectiques locales d'ordre 0, 1 et 2 sur les espaces de superlacets.

Un autre point clé dans la structure géométrique des supercercles $\mathbb{S}^{1|1}$ est l'existence d'une forme de contact $dx + \theta d\theta$ [**MD08**], [**ABF03**] dont le noyau est engendré par le champ de vecteurs $D_c = \theta D_x + D_\theta$. L'opérateur différentiel D_c est une racine carré impaire de l'opérateur D_x : il vérifie $D_c^2 = D_x$. Le module des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est alors une $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}}$ algèbre engendrée seulement par la dérivation D_c plutôt que par les deux dérivations D_x et D_θ (voir Proposition 3.1). Ceci permet d'une part de simplifier les calculs et d'autre part de pouvoir écrire les résultats sous une forme similaire à celle du cas non-super. En effet, une forme locale s'écrit maintenant :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+(i+j).s} X^j Y^i_{(s)} \omega^s_{ij}$$

où

(i) La forme volume canonique 3.1.1 sur $\mathbb{S}^{1|1}$ est intégrée au signe $\int_{\mathbb{S}^{1|1}}$.
(ii) $Y^i_{(s)} = D_c^s(Y^i)$
(iii) Les coefficients ω^s_{ij} sont des éléments de la $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|1}}$-algèbre des jets $J(\mathcal{O}_M)$.

En géneral, il est assez délicat de considérer que les formes sur les espaces de superlacets sont des généralisations du cas classique. En effet, dans un premier temps, puisque $D_c^2 = D_x$, on peut penser qu'une forme d'ordre $2k$ sur l'espace des superlacets généralise les formes d'ordre k du cas non super. Cependant, il faut aussi tenir compte du fait que l'intégration $\int_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est une intégrale de Berezin (cf §1.2.5). L'on peut donc ainsi retrouver les formes d'ordre k classiques aussi à partir des formes d'ordre $2k-1$ sur SLM.

On obtient alors les résultats de classification suivant sur SLM.

***Théorème* (3.16).** — *Les formes d'ordre* 0 *sur* SLM *sont classifiés par les quintuplets* $(\Omega, \Lambda, \lambda, \xi_0, \xi_1)$ *tels que*

(i) $\Omega(x,\theta)$ *est une famille de* 2*-formes presque symplectiques sur* M *paramétrée par* $\mathbb{S}^{1|1}$*,*

(ii) $\Lambda(x,\theta)$ *est une famille de* 3*-formes sur* M *paramétrée par* $\mathbb{S}^{1|1}$*,*

(iii) λ *est une* 3*-formes sur* M*,*

(iv) ξ_0 *et* ξ_1 *sont des* 4*-formes sur* M*.*

***Théorème* (3.26).** — *Les formes d'ordre* 1 *sur* SLM *sont classifiées par les couples* (g, ∇) *où* g *est une métrique riemanienne sur* M *et* ∇ *une connexion compatible avec* g *telle que la torsion sous forme covariante soit une* 3*-forme fermée.*

***Théorème* (3.35).** — *Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre* 2 *sur* SLM *sont classifiées par les quadruplets* $(g, \nabla, g_1, \nabla_1)$ *tels que :*

(i) g *et* g_1 *sont deux métriques Riemaniennes sur* M*.*

(ii) ∇ *est une connexion sur* M *dont la torsion* T *vérifie :*

$$\forall X,Y,Z \in TM,\ \ \iota(X,Y)\nabla_Z(g) = (-1)^{(X+Y).Z}\iota(Z,\iota(X,Y)T)g + (-1)^{X.Y}\iota(Y,\iota(X,Z)T)g$$

(iii) ∇_1 *est une connexion sur* M *dont la torsion covariante (pour* g_1*) est une* 3*-forme fermée.*

Dans le cas super, les formes d'ordre 0 ne dépendent pas des dérivées $u^i_{(s)}$ des coordonnées pour $s \geq 3$ (3.12). Cependant on pourra remarquer que $D_c^2(u^i) = D_x(u^i)$ et donc que les résultats de dépendance sont en fait les mêmes. L'apparition des formes de degré au moins 4 dans le cas super est dû au fait que en supergéométrie, une forme différentielle est symétrique sur les champs de vecteurs impairs.

Pour les formes locales d'ordre 1, on remarque que le résultat est identique dans le cas super et le cas non-super ; les formes s'écrivent respectivement :

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X \iota(X, \nabla_{\dot\gamma} Y) g$$

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} g(X, \nabla_{\dot\gamma} Y) dx$$

Pour les formes d'ordre 2, par contre, on voit que leur classification est plus proche de celle des formes d'ordre 1 du cas non-super que de celle des formes d'ordre 2. Il faut regarder les formes d'ordre 3 sur SLM pour retrouver une classification avec des formes presque symplectiques et des connexions symplectiques. Cependant, dans le cas des formes homogènes d'ordre 3, les calculs n'ont pas abouti. On donne cependant le système d'équations correspondant ainsi qu'un exemple.

Enfin le chapitre 4 est l'adaptation au cas super des résultats de Mokhov [**Mok96**], [**Mok98a**] sur les formes homogènes. On choisit cependant une définition des formes homogènes moins restrictive que celle de Mokhov car l'on autorise une dépendance en les variables x et θ du supercercle. Comme dans le cas non super, ces formes homogènes forment un complexe et l'on calcule complètement les espaces de cohomologie en degré 0 et 1. Pour l'ordre 2, l'on calcule respectivement les 3 premiers espaces de cohomologie et pour l'ordre 3, le premier. Ceci permet d'ailleurs de déterminer les formes symplectiques exactes parmi les formes d'ordre 0, 1 et 2 du chapitre 3.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Puisque le but de cette thèse est d'étendre les résultats de classification de certaines formes symplectiques sur les espace de lacets au cas des espaces de superlacets, ce chapitre de rappels s'organise en deux temps.

Dans un premier, on rappelle la géométrie des espaces de lacets telle qu'elle est présentée dans [**Mok98b**], en explicitant les objets géométriques (espace tangent, fonctionnelles locales, champs de vecteurs et leur action, formes différentielles) dans des systèmes de coordonnées locales. On verra dans le chapitre suivant comment interpréter ces résultats en terme de jets afin de donner un sens mathématique précis aux calculs "à la physicienne" présentés ici. Et dans un deuxième temps, on rappelle les bases de super-géométrie qui nous seront nécessaires pour définir nos espaces de superlacets et en étudier les formes symplectiques.

1.1. Espaces de Lacets

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de Mokhov que l'on cherche à généraliser au cas super. Pour cela, nous allons introduire les espace de lacets, définir leur géométrie en terme de variables locales et expliciter leur structure de variétés de Fréchet.

1.1.1. Définitions et Notations. —

Définition 1. — *Soit M une variété. L'espace des lacets dans M que l'on note LM est l'espace des applications C^∞ du cercle $\mathbb{S}^1$ dans M.*

$$LM = C^\infty(\mathbb{S}^1, M)$$

Notons $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}$ les faisceaux de fonctions C^∞ sur M et sur $\mathbb{S}^1$ respectivement. Un lacet $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ définit alors un morphisme de faisceau d'algèbres :

$$\begin{array}{cccc} \gamma^* & : & \mathcal{O}_M & \to & \gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}) \\ & & f & \mapsto & f \circ \gamma \end{array}$$

Par abus de notation, on écrit simplement dans la suite $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}$ à la place de $\gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1})$.

Puisque les faisceaux $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}$ sont fins (existence de partitions de l'unité C^∞), ce morphisme de faisceau est aussi parfaitement défini (cf [**BBHR91**]) par le morphisme d'algèbres :

$$\begin{array}{cccc} \gamma^* & : & C^\infty(M) & \to & C^\infty(\mathbb{S}^1) \\ & & f & \mapsto & f \circ \gamma \end{array}$$

Et les données compatibles du morphisme d'algèbre γ^* sur chaque ouvert de trivialisation de M permettent de reconstruire γ^* sur tout $C^\infty(M)$. Soit p la dimension de M et $(x^i)_{1\leq i\leq p}$ un système de coordonnées locales de M sur un ouvert de trivialisation U alors γ_U^* est parfaitement défini par les images $\gamma_U^*(x^i) \in \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}(\gamma^{-1}(U))$ du système de coordonnée (cf [**BBHR91**]). En effet, celui-ci détermine parfaitement γ sur $\gamma^{-1}(U) \subset \mathbb{S}^1$ par :

$$\forall x \in \gamma^{-1}(U), \gamma(x) = (\gamma^*(x^1)(x), \cdots, \gamma^*(x^p)(x)) \in U$$

L'on pourra ainsi travailler localement avec les $\gamma^*(x^i)$ comme variables locales en regardant chaque x^i comme une famille infinie de coordonnées, paramétrée de manière C^∞ par $\mathbb{S}^1$ (un ouvert U de $\mathbb{S}^1$). En effet, à $x \in \mathbb{S}^1$ fixé, chaque x^i définit la fonctionnelle :

$$\begin{array}{cccc} x_x^i & : & LM & \to & \mathbb{R} \\ & & \gamma & \mapsto & \gamma^*(x^i)(x) \end{array}$$

Pour suivre les travaux de Mokhov, nous allons définir les fonctionnelles en terme des variables locales. Nous verrons dans la suite comment interpréter ces fonctionnelles comme les co-invariants d'une algèbre de jets.

Dans toute la suite, on note x la variable sur le cercle.

Chaque variable locale $\gamma^*(x^i)$ est une fonction C^∞ sur un ouvert du cercle. On peut donc considérer ses dérivées par rapport à x. On note :

- $D_x = \dfrac{d}{dx}$ l'opérateur de différentiation totale le long du cercle.
- $x^i_{(s)}$ la famille infinie de coordonnées paramétrée de manière C^∞ par $\mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{cccc} x_{(s)}^i & : & LM & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}(U) \\ & & \gamma & \mapsto & D_x^s(\gamma^*(x^i)) \end{array}$$

Une fonctionnelle locale est une fonctionnelle qui dépend d'un nombre fini des variables $x^i_{(s)}$.

Définition 2. — *Soit M une variété de dimension q. Une fonctionnelle locale F sur l'espace de lacet LM est une fonctionelle telle que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que localement F s'écrive :*

$$\forall \gamma \in LM, \quad F(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} f(x, \gamma^*(x^i), \gamma^*(x^i)_x, \cdots, \gamma^*(x^i)_{(k)})dx$$

avec $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+k.q})$.
On la note simplement

$$F = \int_{\mathbb{S}^1} f(x, x^i, x^i_x, \cdots, x^i_{(k)})dx$$

Et on note $\mathcal{F}$ l'espace des fonctionnelles locales.

Remarque. — *L'expression $f(x, x^i, x^i_{(1)}, \cdots, x^i_{(k)})$ est en fait un élément de l'algèbre des jets écrit localement (cf §2.4.1). Dans la suite on l'appellera donc un jet. On dit qu'il s'agit d'un jet d'ordre k si il existe un indice i tel que f dépende de $x^i_{(k)}$ et tel que f soit indépendant de $x^j_{(k')}$ pour tout indice j et tout $k' > k$. Une fonctionnelle F est donc une fonctionnelle locale si il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que F s'exprime au moyen de jets d'ordre au plus k.*

Un jet f peut-être évalué en un lacet γ, $f(\gamma) = f(x, \gamma^*(x^i), \gamma^*(x^i)_{(1)}, \cdots, \gamma^*(x^i)_{(k)}) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$. On peut donc calculer $D_x(f(\gamma))$ et on a :

$$\begin{aligned} D_x(f(\gamma) &= \frac{d}{dx}(f(x,\gamma^*(x^i),\cdots,(\gamma^*(x^i))_{(k)})) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\gamma^*(x^i),\cdots,(\gamma^*(x^i))_{(k)}) + \sum_s (\gamma^*(x^i))_{(s+1)}\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}}(x,\gamma^*(x^i),\cdots,(\gamma^*(x^i))_{(k)}) \end{aligned}$$

L'application $\gamma \mapsto D_x(\gamma(f))$ représente donc encore un jet que l'on notera $D_x(f)$. L'opérateur D_x agit donc sur les jets et d'après le calcul précédent, on a :

Proposition 1.1. — *Localement l'opérateur de différentiation totale le long du cercle D_x s'écrit*

$$D_x = \partial_x + \sum_s x^i_{(s+1)}\frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}}$$

1.1.2. Géométrie sur les espaces de lacets : champs de vecteurs et formes. —

Puisque l'algèbre des fonctionnelles C^∞ de LM est un très gros espace (ce n'est d'ailleurs même pas un espace de Fréchet contrairement à LM, cf [**Ham82**], [**Sta05**]), il est difficile de définir les champs de vecteurs et les vecteurs tangents en terme de dérivations. Pour définir un vecteur tangent, on opte donc pour la version dynamique des classes d'équivalence des courbes de lacets. Or, nous n'avons pas encore introduit de topologie ni de structure différentiable sur LM. Nous le ferons en 1.1.6. Un chemin de lacets γ_t de LM avec $t \in [0,1]$ sera alors une application C^∞ :

$$\begin{array}{ccc} [0,1]\times\mathbb{S}^1 & \to & M \\ (t,x) & \mapsto & \gamma_t(x) \end{array}$$

On a ainsi :

Proposition 1.2. — *Soit $\gamma \in LM$, alors*

$$T_\gamma LM = \Gamma_{\mathbb{S}^1}\gamma^*(TM)$$

Démonstration. — Soit γ_t un chemin de lacet tel que $\gamma_0 = \gamma$ et $x \in \mathbb{S}^1$. La fonction $t \mapsto \gamma_t(x)$ est simplement une courbe dans M. Elle définit donc un vecteur $v(x) = \frac{d\gamma_t(x)}{dt} \in T_{\gamma(x)}M$. L'application $s : x \to v(x) = \frac{\gamma_t}{dt}|_x(x)$ est bien C^∞ puisque $(t,x) \to \gamma_t(x)$ est C^∞ et s'identifie à une section $s \in \Gamma_{\mathbb{S}^1}\gamma^*(TM)$. □

L'on verra, en 1.1.6 qu'un ouvert de l'espace des lacets contenant γ défini un voisinage de $\mathrm{Im}(\gamma)$ dans M. L'expression "en coordonnées locale" sur l'espace des lacets signifiera sur un intervalle $I \subset \mathbb{S}^1$ ouvert et un ouvert $V \subset LM$ tel que $\forall\gamma' \in V, \gamma'(I) \subset U$ où U est un ouvert de carte de M avec un système de coordonnées x^i.

En coordonnées locales, un vecteur tangent au lacet γ est donc de la forme $X = X^i\partial_i$ avec $X^i \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ et ∂_i le champs de vecteurs sur l'ouvert de trivialisation U le long de γ.

Un champs de vecteur X est une application qui à tout lacet γ associe de manière C^∞ un vecteur tangent $X(\gamma) \in T_\gamma LM$. En coordonnées locales, un champs de vecteurs sera de la forme $X = X^i(x, x^i, \cdots, x^i_{(s)}, \cdots)\partial_i$ avec X^i un jet.

Définition 3. — *Un champs de vecteur sur LM est un champs de vecteur local si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que localement les coordonnées X^i de X dans n'importe quel système de coordonnées local de M soient des jets d'ordre au plus k.*

On note l'espace des champs de vecteurs locaux sur LM,

$$\mathit{Vect}(LM)$$

Pour travailler correctement en coordonnées locales, il est impératif de connaitre les lois de transformations des quantités introduites. De la proposition précédente, on déduit directement le corollaire suivant.

Corollaire 1.3. — *Sur un ouvert de trivialisation $U \subset M$, soit (y^j) un nouveau système de coordonnées. Les lois de transformations des coordonnées des vecteurs et champs de vecteurs sont alors respectivement :*

- *Au lacet γ, $X'^j = \gamma^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})X^i$.*
- *En terme de jets, $X'^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}X^i$.*

Les fonctionnelles locales sont des fonctionnelles. On peut donc définir l'action des champs de vecteurs sur les fonctionnelles locales.

Proposition 1.4. — *Soit $F \in \mathcal{F}$ une fonctionnelle locale de la forme $F = \int_{\mathbb{S}^1} f(x, x^i, x^i_x, \cdots, x^i_{(k)})dx$ et $X = X^i\partial_i$ un champ de vecteur sur LM. L'action de X sur F s'écrit :*

$$X.F = \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)} \frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}} dx$$

Démonstration. — En terme de jets, la démonstration est faite en 2.4.4. Ici, adoptons une démonstration plus géométrique de l'action d'un vecteur tangent X au lacet γ. Soit γ_t un chemin de lacets tel que $\gamma_0 = \gamma$ et $\frac{d}{dt}(\gamma_t) = X$.

On a :

$$\begin{aligned}
\gamma_t^*(f) &= f(x, \gamma_t^*(x^i), \gamma_t^*(x^i)_x, \cdots, \gamma_t^*(x^i)_{(k)}) \\
&= f(x, \gamma^*(x^i) + tX^i + o(t^2), \gamma^*(x^i)_x + tX^i_x + o(t^2), \cdots, \gamma^*(x^i)_{(k)} + tX^i_{(k)} + o(t^2)) \\
&= f(x, \gamma^*(x^i), \gamma^*(x^i)_x, \cdots, \gamma^*(x^i)_{(k)}) + (tX^i_{(s)} + o(t^2))\gamma^*(\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}}) \\
&= \gamma^*(f) + tX^i_{(s)}\gamma^*(\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}}) + o(t^2)
\end{aligned}$$

car $\gamma^*(\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}})$ est borné sur $\mathbb{S}^1$.

et ainsi, $F(\gamma_t) - F(\gamma) = t\int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}\gamma^*(\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}})dx + o(t^2)$. □

On peut vérifier que cette action est bien indépendante du système de coordonnées. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5. — *Localement, dans un système de coordonnées (x^i) sur M, on a :*

$$\forall k, s \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} \circ D^k_x = \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}}$$

Si $s - r < 0$ alors, $\dfrac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} = 0$.

Démonstration. — Par récurrence sur $k \geq 1$, le cas $k = 0$ est trivial.
Pour le cas, $k = 1$, on a : $\dfrac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} \circ D_x = \dfrac{\partial}{\partial x^i_{(s-1)}} + D_x \circ \dfrac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} = \sum_{r=0}^{1} C^r_k D^{k-r}_x \circ \dfrac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}}$
et si l'on suppose la propriété vraie au rang k, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} \circ D^{k+1}_x &= \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} \circ D_x \\
&= \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-(r+1))}} + \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k+1-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} \\
&= \sum_{r=1}^{k} C^{r-1}_k D^{k+1-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} + \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k+1-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} \\
&= \sum_{r=1}^{k} (C^{r-1}_k + C^r_k) D^{k+1-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}} + D^{k+1}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} \\
&= \sum_{r=0}^{k} (C^r_{k+1}) D^{k+1-r}_x \circ \frac{\partial}{\partial x^i_{(s-r)}}
\end{aligned}$$

□

Soit (y^j) un nouveau système de coordonnées.
Les k-jets dépendent d'un nombre fini de variables $x^i_{(s)}$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} = \frac{\partial y^j_{(k)}}{\partial x^i_{(s)}} \frac{\partial}{\partial y^j_{(k)}}$$

et d'après le lemme, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}} = \sum_k \sum_{r=0}^{k} C^r_k D^{k-r}_x \Big(\frac{\partial y^j}{\partial x^i_{(s-r)}}\Big) \frac{\partial}{\partial y^j_{(k)}} = \sum_{k \geq s} C^s_k D^{k-s}_x \Big(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\Big) \frac{\partial}{\partial y^j_{(k)}}$$

car $\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i_{(s-r)}} = 0$ si $s - r \neq 0$.
Et ainsi,

$$\begin{aligned}
X^j_{(s)}\frac{\partial f}{\partial y^j_{(s)}} &= (\frac{\partial y^j}{\partial x^i}X^i)_{(s)}\frac{\partial f}{\partial y^j_{(s)}}\\
&= \sum_{k=0}^{s} C_s^k(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_{(s-k)}X^i_k\frac{\partial f}{\partial y^j_{(s)}}\\
&= X^i_s\sum_{k\geq s} C_k^s(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})_{(k-s)}\frac{\partial f}{\partial y^j_{(k)}}\\
&= X^i_s\frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}}
\end{aligned}$$

De l'action des champs de vecteurs sur les fonctionnelles locales on peut déduire le crochet de deux champs de vecteurs comme le commutateur de ces deux opérateurs.

Proposition 1.6. — *Soient $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ deux champs de vecteurs. Le crochet de deux champs de vecteur est un champ de vecteurs de coordonnées :*

$$[X,Y]^j = X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}} - Y^i_{(s)}\frac{\partial X^j}{\partial x^i_{(s)}}$$

Démonstration. — Soit $F \in \mathcal{F}$ une fonctionnelle. Il suffit de calculer $X.(Y.F)-Y.(X.F)$ et de vérifier que cela correspond bien à l'action du champs de vecteur $(X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}} - Y^i_{(s)}\frac{\partial X^j}{\partial x^i_{(s)}})\partial_j$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
X.(Y.F) &= \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}\frac{\partial}{\partial x^i_{(s)}}(Y^j_{(r)}\frac{\partial f}{\partial x^j_{(r)}})\\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}}\frac{\partial f}{\partial x^i_{(r)}} + X^i_{(s)}Y^j_{(r)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i_{(s)}\partial x^j_{(r)}}
\end{aligned}$$

Le deuxième terme est symétrique en X et Y par somme sur les indices muets s et r, il s'annule donc dans l'expression du commutateur et on a :

$$X.(Y.F) - Y.(X.F) = (X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}} - Y^i_{(s)}\frac{\partial X^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}})\frac{\partial f}{\partial x^j_{(r)}}$$

Il suffit maintenant de vérifier que :

$$X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}} - Y^i_{(s)}\frac{\partial X^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}} = (X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}} - Y^i_{(s)}\frac{\partial X^j}{\partial x^i_{(s)}})_{(r)}$$

Montrons par récurrence que $X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_{(r)}}{\partial x^i_{(s)}} = (X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}})_{(r)}$.

Pour $r = 0$, il n'y a rien à montrer.

Pour $r = 1$, on a, d'après le lemme 1.5 :

$X^i_{(s)}\dfrac{\partial Y^j_{(1)}}{\partial x^i_{(s)}} = X^i_{(s)}\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s-1)}} + X^i_{(s)}D_x(\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}}) = X^i_{(s+1)}\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}} + X^i_{(s)}D_x(\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}}) = D_x(X^i_{(s)}\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}})$

Et enfin, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le cas $r = 1$,

$$X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_{(r+1)}}{\partial x^i_{(s)}} = (X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j_x}{\partial x^i_{(s)}})_{(r)} = (X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_{(s)}})_{(r+1)}$$

□

Corollaire 1.7. — *L'action des champs de vecteurs sur les fonctionnelles locales est une action d'algèbre de Lie.*

Définition 4. — *Soit $k \in \mathbb{N}$. Une k-forme différentielle locale ω sur LM sera une application multilinéaire alternée qui à k champs de vecteur $X_1, \cdots, X_k$ locaux associe la fonctionnelle locale :*

$$\omega(X_1, \cdots, X_k) = \int_{\mathbb{S}^1} (X_1)^{i_1}_{(s^1)} \cdots (X_k)^{i_k}_{(s_k)} \omega^{s_1,\cdots s_k}_{i_1,\cdots,i_k} dx$$

telle que $\exists s \in \mathbb{N}$ tel que si $\exists j \in [0, k]$ tel que $s_j > s$ alors $\omega^{s_1,\cdots s_k}_{i_1,\cdots,i_k} = 0$ dans tout système de coordonnées locales.

et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que les $\omega^{s_1,\cdots s_k}_{i_1,\cdots,i_k}$ sont au plus des n-jets dans tout système de coordonnées.

Par intégration par partie, on voit que les $\omega^{s_1,\cdots s_k}_{i_1,\cdots,i_k}$ ne sont pas uniques et que l'on peut se ramener au cas où $\omega^{s_1,\cdots s_k}_{i_1,\cdots,i_k} = 0$ si $s_1 > 0$. Les coefficients sont alors définis de manière unique.

On notera $\Omega^k(LM)$ l'espace vectoriel des k-formes différentielles locales et par définition, on a :

$$\Omega^k(LM) = \Lambda^k_{\mathcal{F}}(\mathrm{Vect}(LM), \mathcal{F})$$

Pour terminer cette partie, il reste simplement à définir la différentielle extérieure d sur les formes différentielles locales. La différentielle extérieure d'une forme locales est encore une forme locale et est définie par :

Définition 5. — *Soit $\omega \in \Omega^k(LM)$ une k-forme différentielle locale. La différentielle extérieur de ω est la $k+1$-forme $d\omega \in \Omega^{k+1}(LM)$ définie par :*

$$d\omega(X_0, \cdots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i.\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, X_{i+1}, \cdots, X_k)$$
$$+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\omega(X_0, \cdots, X_{i-1}, [X_i, X_j], X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, \widehat{X_j}, X_{j+1}, \cdots, X_k)$$

où

$$X_i.\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, X_{i+1}, \cdots, X_k)$$

est l'action du $i_{\text{ème}}$ champ de vecteur X_i sur la fonctionnelle locale $\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, X_{i+1}, \cdots, X_k)$

La formule étant la même que celle de la différentielle de de Rham sur une variété, on a immédiatement que

– L'application $d\omega$ est bien une application multilinéaire alternée.
–
$$d^2 = 0$$

1.1.3. Structures symplectiques sur LM. —

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement aux 2-formes.

Définition 6. — *Soit $s \in \mathbb{N}$. Une 2 forme différentielle locale ω est une forme symplectique d'ordre s si elle s'écrit*

$$\omega(X,Y) = \int_{\mathbb{S}^1} X^i \sum_{t=0}^{s} Y^j_{(t)} \omega^t_{ij} dx$$

avec
– $d\omega = 0$
– $\forall x \in \mathbb{S}^1, \gamma \in LM,\ \gamma^*(\omega^s_{ij})(x)$ *est inversible.*

Remarque. — *L'espace des lacets LM est une variété de Fréchet. Si le fibré tangent de LM est encore un espace de Fréchet, son fibré cotangent n'en est pas un, voir* [**Ham82**]. *Beaucoup plus "gros", il n'existe en général pas d'isomorphisme entre le fibré tangent et le fibré cotangent. Il est donc difficile d'avoir des vraies formes symplectiques qui définissent un isomorphisme $\omega^\sharp : TLM \to T^*LM$. Les formes que nous étudierons seront seulement pré-symplectiques, càd telles que $\forall \gamma \in LM$, $\omega^\sharp(\gamma) : T_\gamma LM \to T^*_\gamma LM$ soit de noyau de dimension finie* [**Sou70**] *et dans le meilleur des cas faiblement symplectique* [**Wei77**], *càd telles que l'application $\omega^\sharp$ soit injective. Par abus de langage, on les appellera quand même symplectiques.*

Le but de l'article [**Mok98b**] de Mokhov est de classifier ces formes symplectiques sur LM à l'aide d'objets géométriques sur M. Pour cela, il faut déterminer la nature géométrique des coefficients ω^t_{ij}.

Proposition 1.8. — *Soit (x^i) et (y^j) deux systèmes de coordonnées locales de M sur deux ouverts de trivialisations d'intersection non-vide. Si l'on note respectivement ω^t_{ij} et ω'^r_{kl} les coefficients de ω correspondant, on a :*

$$\omega'^r_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \sum_{t \geq r}^{s} C^r_t (\frac{\partial y^l}{\partial x^j})_{(t)} \omega^t_{ij}$$

Démonstration. — $X^i = X'^k \dfrac{\partial x^i}{\partial y^k}$
et

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{t=0}^{s} Y^j_{(t)} \omega^t_{ij} = \sum_{t=0}^{s} (Y'^l \frac{\partial x^j}{\partial y^l})_{(t)} \omega'^r_{kl} &= \textstyle\sum_{t=0}^{s} \sum_{r=0}^{t} C^r_t Y^j_{(r)} (\frac{\partial x^j}{\partial y^l})_{(t-r)} \omega^t_{ij} \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{s} Y^j_{(r)} \sum_{t \geq r}^{s} C^r_t (\frac{\partial y^l}{\partial x^j})_{(t-r)} \omega^t_{ij}\end{aligned}$$

□

Les propriétés d'alternance et de fermeture de la forme symplectique s'expriment aussi en coordonnées locales. Pour la première, on a :

Proposition 1.9. — *Soit ω une 2-forme locale, alors la condition d'antisymétrie s'écrit :*

$$\omega_{ij} = -\sum_{s \geq t} (-1)^s C^t_s (\omega^s_{ji})_{(s-t)}$$

Démonstration. — La démonstration consiste en de simples intégrations par partie.

$$\begin{aligned}
\omega(Y,X) &= \int_{\mathbb{S}^1} Y^j X^i_{(t)}\omega^t_{ji}dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i(-1)^t(Y^j\omega^t_{ji})_{(t)}dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i \sum_{s=0}^{t}(-1)^t C^s_t (Y^j)_{(s)}(\omega^t_{ji})_{(t-s)}dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i (Y^j)_{(s)} \sum_{t\geq s}(-1)^t C^s_t (\omega^t_{ji})_{(t-s)}dx
\end{aligned}$$

□

Pour la deuxième :

Proposition 1.10. — *Une 2-forme locale ω est fermée ssi pour tous champs de vecteurs $Y = Y^j\partial_j$ et $Z = Z^k\partial_k$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, (-1)^s(Y^j(x)Z^k(x)_{(t)}\frac{\partial\omega^t_{jk}}{\partial x^i_{(s)}})_{(s)} - Y^j_{(s)}(x)Z^k_{(t)}(x)\frac{\partial\omega^t_{ik}}{\partial x^j_{(s)}} + Y^j_{(t)}(x)Z^k_{(s)}(x)\frac{\partial\omega^t_{ij}}{\partial x^k_{(s)}} = 0$$

Démonstration. — Il "suffit" de calculer $d\omega$. Soit $X = X^i\partial_i$, $Y = Y^j\partial_j$ et $Z = Z^k\partial_k$ trois champs de vecteurs.

On a :

$$\begin{aligned}
X.(\omega(Y,Z)) &= \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}\frac{\partial}{\partial u^i_{(s)}}(Y^j Z^k_{(t)}\omega^t_{jk}) \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}(\frac{\partial Y^j}{\partial u^i_{(s)}}Z^k_{(t)}\omega^t_{jk} + Y^j\frac{\partial Z^k_{(t)}}{\partial u^i_{(s)}}\omega^t_{jk} + Y^j Z^k_{(t)}\frac{\partial\omega^t_{jk}}{\partial u^i_{(s)}})
\end{aligned}$$

et

$$\omega([X,Y],Z) = \int_{\mathbb{S}^1}(X^i_{(s)}\frac{\partial Y^j}{\partial u^i_{(s)}} - Y^i_{(r)}\frac{\partial X^j}{\partial u^i_{(r)}})Z^k_{(t)}\omega^t_{jk}$$

Les deux premiers termes de $X.(\omega(Y,Z))$ vont se simplifier avec les termes faisant intervenir les crochets de Lie, et au final :

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z) &= \int_{\mathbb{S}^1} X^i_{(s)}Y^j Z^k_{(t)}\frac{\partial\omega^t_{jk}}{\partial u^i_{(s)}} - X^i Y^j_{(s)}Z^k_{(t)}\frac{\partial\omega^t_{ik}}{\partial x^j_{(s)}} + X^i Y^j_{(t)}Z^k_{(s)}\frac{\partial\omega^t_{ij}}{\partial x^k_{(s)}}dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} X^i((-1)^s(Y^j(x)Z^k(x)_{(t)}\frac{\partial\omega^t_{jk}}{\partial x^i_{(s)}})_{(s)} - Y^j_{(s)}(x)Z^k_{(t)}(x)\frac{\partial\omega^t_{ik}}{\partial x^j_{(s)}} + Y^j_{(t)}(x)Z^k_{(s)}(x)\frac{\partial\omega^t_{ij}}{\partial x^k_{(s)}})dx
\end{aligned}$$

En chaque lacet, les coordonnées du vecteur tangent X^i sont des fonctions quelconques de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, d'où le résultat.

□

Excepté dans le cas d'ordre 0, identifier toutes les formes symplectiques d'un ordre donné mène à des calculs trop complexes. On pourra se contenter alors des formes symplectiques locales homogènes.

Comme dans [**Dub01**], on peut simplement considérer les jets polynomiaux en les dérivées $x^i_{(s)}$ avec $s \geq 1$. On obtient une algèbre polynomiale J qui est un $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M)$-module. On regarde alors le J-module d'opérateurs différentiels engendé par D_x. On munit ce module d'une $\mathbb{Z}$ graduation telle que $\forall f, g, |f\ g| = |f| + |g|$ et on attribue le degré 1 à l'opérateur D_x, le degré s à tout élément $x^i_{(s)}$ et le degré 0 aux fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M)$. Dans le cas des formes d'ordre 0, on montre que les jets qui interviennent sont nécessairement dans ce module. Pour les ordres supérieurs, l'on se restreint aux cas des formes homogènes, qui sont par définition, des éléments de ce module, en effet :

Définition 7. — *Soit $k \in \mathbb{N}$. Une 2-forme différentielle ω est dite homogène d'ordre k si localement, pour tout couple (i,j) d'indices, il existe un opérateur différentiel $\omega_{ij} = \sum_{s=0}^k \omega^s_{ij}(x, x^i, \cdots, x^i_{(k)})D^s_x$ de degré k tel que ω s'écrive :*

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^1} X^i \omega_{ij}(Y^j) dx$$

Exemple 1. —
- *Un opérateur de degré 0 est de la forme $\omega_{ij} = \omega^0_{ij}$ et agit sur Y^j par simple multiplication.*
- *Un opérateur de degré 1 est de la forme $\omega_{ij} = \omega^0_{ijk}u^k_x + \omega^1_{ij}D_x$.*
- *Un opérateur de degré 2 est de la forme $\omega_{ij} = \omega^0_{ijkl}u^k_{(1)}u^l_{(1)} + \omega^0_{ijk}u^k_{(2)} + \omega^1_{ijk}u^k_x D_x + \omega^2_{ij}D^2_x$.*

1.1.4. Théorèmes de classification de certaines formes symplectiques sur LM. —

Pour les formes d'ordre 0, on a un résultat très intéressant à savoir que la condition de fermeture impose aux coefficients ω^0_{ij} que l'on note simplement ω_{ij} de ne pas dépendre des dérivées $x^i_{(s)}$ d'ordre supérieur à 1. On a le même résultat dans le cas des superlacets (on explicitera la démonstration quasi similaire à ce moment là). On obtient ainsi le théorème de classification suivant :

***Théorème 1.11* (Mokhov).** — *L'ensemble des formes symplectiques d'ordre 0 sur l'espace des lacets LM est en bijection avec l'espace des couples $(\Omega(x), S)$ où*
- *$\Omega(x)$ est une famille de 2 formes sur la variété M paramétrée par $\mathbb{S}^1$.*
- *S est une trois forme fermée sur la variété M*

Soit γ un lacet de LM. On note $\dot\gamma = \dfrac{d\gamma}{dx}$ le vecteur dérivé le long de γ. La bijection associe alors à tout couple $(\Omega(x), S)$ la forme ω donnée par : $\forall \gamma \in LM$ et $\forall X, Y \in Vect(LM)$,

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} (\Omega(x)(X,Y) + S(X,Y,\dot\gamma(x)) + \int_0^x d\Omega(X,Y,\dot\gamma(t))dt)dx$$

Remarque. — *On peut remarquer qu'il est équivalent de dire que $\Omega(x)$ est une famille de 2-formes sur M paramétrée par $\mathbb{S}^1$ et que Ω est une 2-forme sur $\mathbb{S}^1 \times M$ telle que $\iota(\dfrac{\partial}{\partial x})\omega = 0$. Etant donné que l'on cherche une classification à partir d'objet géométriques de M, on préfèrera la première interprétation.*

On regarde maintenant les formes d'ordre 1.

On montre ici un résultat similaire de dépendance finie de l'ordre de dérivation des $x^i_{(s)}$.

Proposition 1.12. — *Si* $\omega(X,Y) = \int_{\mathbb{S}^1} X^i Y^j_{(1)}\omega^1_{ij} + X^iY^j\omega^0_{ij}dx$ *est une forme fermée d'ordre* 1 *alors les coefficients* ω^1_{ij} *et* ω^0_{ij} *ne dépendent pas des variables* $x^k_{(s)}$ *pour* $s \geq 5$.

Démonstration. — Dans le cas de l'ordre 1, la condition de fermeture s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^t(\frac{d}{dx})^t(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}}) - Y^j_{(t)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial x^j_{(t)}} + Y^jZ^i_{(t)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial x^i_{(t)}} \\ &\quad +(-1)^t(\frac{d}{dx})^t(Y^jZ^i_x\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(t)}}) - Y^j_{(t)}Z^i_x\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial x^j_{(t)}} + Y^j_xZ^i_{(t)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial x^i_{(t)}} \end{aligned}$$

Soit $r = \mathtt{max}\{s|\exists i,j,k,\ \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^x_{(s)}} \neq 0 \ \mathtt{ou}\ \frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(s)}} \neq 0\}$ et raisonnons par l'absurde. Supposons que $r \geq 3$ et regardons le coefficient de $Y^j_{(r-1)}Z^i_{(2)}$. Seul le quatrième terme contribue (le dernier terme est exclu car $r \geq 3$) et sa contribution est de $(-1)^{r-1}r\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(r)}}$. Donc $\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(r)}} = 0$. D'après la définition de r, on peut donc trouver i,j,k tels que $\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(r)}} \neq 0$.

D'autre part, on a :

$$(-1)^t(\frac{d}{dx})^t(Y^jZ^i_x\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(t)}}) = Y^j_{(m)}Z^i_{(n+1)}C^m_{m+n}\sum_{t\geq m+n}^{r-1}(-1)^tC^{m+n}_t(\frac{d}{dx})^{t-m-n}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(t)}}$$

et

$$\begin{aligned} (-1)^t(\frac{d}{dx})^t(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}}) &= Y^j_{(m)}Z^i_{(n)}C^m_{m+n}\sum_{t\geq m+n}^{r}(-1)^tC^{m+n}_t(\frac{d}{dx})^{t-m-n}\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}} \\ &= Y^j_{(m)}Z^i_{(n+1)}C^m_{m+n+1}\sum_{t\geq m+n+1}^{r}(-1)^tC^{m+n+1}_t(\frac{d}{dx})^{t-m-n-1}\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}} \\ &\quad +Y^j_{(m)}Z^i\sum_{t\geq m}^{r}(-1)^tC^m_t(\frac{d}{dx})^{t-m}\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}} \\ &= Y^j_{(m)}Z^i_{(n+1)}C^m_{m+n+1}\sum_{t\geq m+n}^{r-1}(-1)^{t+1}C^{m+n+1}_{t+1}(\frac{d}{dx})^{t-m-n}\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t+1)}} \\ &\quad +Y^j_{(m)}Z^i\sum_{t\geq m}^{r}(-1)^tC^m_t(\frac{d}{dx})^{t-m}\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(t)}} \end{aligned}$$

On suppose r assez grand.

Afin que les seuls termes que l'on vient de développer interviennent dans les coefficients, regardons les composantes de $Y^j_{(m)}Z^i_{(n+1)}$ avec $m \geq 2$ et $n \geq 1$ et telles que $m+n = r-1$ (D'après le résultat précédent, toutes les composantes sont nulles si $m+n = r$).

Ces composantes valent alors : $C^m_{r-1}(-1)^{r-1}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(r-1)}} + C^m_r(-1)^r\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(r)}}$.

Comme ω est fermée, on a alors :

$$\frac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(r-1)}} = \frac{r-m-1}{r}\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(r)}}$$

Donc si il existe 2 valeurs de m telles que $m \geq 2$, $n \geq 1$ et $m+n = r-1$ alors $\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(r)}} = 0$ et donc on obtient une contradiction. Or pour $r \geq 5$ c'est le cas puisque $3+1 = 5-1$ et $2+2 = 5-1$.

Donc ω dépend au plus de $x, x^k, x^k_x, \cdots, x^k_{(4)}$.

□

On pourra remarquer que d'après la démonstration, si $r = 4$, et donc $m = 2$ on a : $\dfrac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial x^k_{(3)}} = \frac{1}{4}\dfrac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial x^k_{(4)}}$ et on pourrait espérer que les coefficients soient liés entre eux par des relations du même ordre de simplicité. Cependant, tenter de trouver toutes les formes symplectiques d'ordre 1 s'est révélé trop compliqué avec les méthodes de calculs habituelles et de la même manière que Mokhov, l'on se restreint aux formes locales homogènes pour les ordres 1 et 2. De par la condition de fermeture, celles-ci ont l'avantage de ne pas dépendre explicitement du paramètre x du cercle $\mathbb{S}^1$.

On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1.13 **(Mokhov)**. — *Soit M une variété. L'espace des formes symplectiques locales homogènes d'ordre 1 sur l'espace des lacets LM est en bijection avec l'espace des couples (g, ∇) où :*
- *g est une métrique pseudo-Riemanienne sur M*
- *∇ est une connexion affine compatible avec la métrique g.*
- *La torsion covariante de la connexion est une 3-forme fermée sur M.*

La bijection associe alors à tout couple (g, ∇) la forme ω donnée par : $\forall \gamma \in LM$ et $\forall X, Y \in Vect(LM)$,

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} g(X, \nabla_{\dot\gamma}(Y))(x)dx$$

Ces formes symplectiques homogènes d'ordre 1 sont en fait seulement présymplectiques car en tout lacet γ, le noyau de l'application $\omega^\sharp(\gamma) : T_\gamma(LM) \to T^*_\gamma(LM)$ est donné par l'espace des champs de vecteurs Y parallèles le long de γ càd tels que $\forall x \in \mathbb{S}^1, \nabla_{\dot\gamma} Y = 0$. Le noyau est bien de dimension finie inférieure ou égale à la dimension de M.

Avant d'énoncer le théorème pour les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 2, on rappelle les deux définitions suivantes.

Définition 8. — (i) *Une 2-forme non dégénérée ω sur une variété M est appelé forme presque symplectique.*

(ii) *Une connexion ∇ sur une variétée prśymplectique (M, ω) est dite symplectique si $\nabla\omega = 0$.*

Pour des résultats sur les connexions symplectiques, on renvoie à [**BC99**].

Théorème 1.14 **(Mokhov)**. — *Soit M une variété. L'espace des formes symplectiques locales homogènes d'ordre 2 sur l'espace des lacets LM est en bijection avec l'espace des couples $(< \cdot, \cdot >, \nabla)$ où :*

– $< \cdot, \cdot >$ *est une forme presque symplectique sur* M
– ∇ *est une connexion symplectique.*

On note T *la torsion de la connexion,* R *sa courbure et* $\sum_{(X,Y,Z)}$ *la somme sur les permutations circulaires de* (X, Y, Z)*. Pour tous champs de vecteurs* X *et* Y *de* TLM *et tout lacet* γ*, on a :*

$$\begin{aligned}\omega(X,Y)(\gamma) = \textstyle\int_{\mathbb{S}^1} (< X, \nabla^2_{\dot\gamma} Y > + < T(X,Y), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > + \frac{1}{2} < \dot\gamma, R(X,Y)\dot\gamma > \\ + < \dot\gamma, \textstyle\sum_{(X,Y,\dot\gamma)} R(X,Y)\dot\gamma > + < T(\dot\gamma, X), T(\dot\gamma, Y) >) dx\end{aligned}$$

Corollaire 1.15. — *Dans le cas plat où la courbure est nulle, les formes homogènes d'ordre* 2 *s'écrivent simplement :*

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} (< X, \nabla^2_{\dot\gamma} Y > + < T(X,Y), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma > + < T(\dot\gamma, X), T(\dot\gamma, Y) >) dx$$

1.1.5. Analyse sur l'espace des lacets. —

On se basera sur les résultats de l'article d'Andrew Stacey *The Differential Topology of Loop Spaces*, [**Sta05**] qui consiste à adapter les résultats du livre de Kriegl-Michor *The convenient setting of global analysis*, [**KM97**] au cas des espaces de lacets.

Par soucis de complétude, on introduit quelques définitions, afin de définir la notion d'espace localement convexe convenable. On renvoie à [**KM97**] pour une étude plus détaillée. Plus que la topologie, c'est le concept de "bornologie" qui se trouve être pertinent pour le calcul différentiel dans les espaces de Fréchet.

Définition 9 ([**KM97**]). — (i) *Un espace localement convexe* E *est un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes, tels que* E *soit un espace de Hausdorff pour la topologie induite par cette famille de semi-normes.*
(ii) *Un sous-espace* F *de* E *est dit-borné s'il est absorbé par tout voisinage de* 0 *càd si pour tout voisinage* V *de* 0*,* $F \subset \cup_r rV$*.*
(iii) *La bornologie de* E *est l'ensemble des sous-ensembles bornés de* E*.*
(iv) *La bornologification d'un espace localement convexe* E *est la topologie localement convexe la plus fine qui laisse inchangée la bornologie de* E*.*
(v) *Un espace est bornologique si il est stable par bornologification.*
(vi) *Un espace localement convexe convenable est un espace localement convexe bornologique.*

Proposition 1.16. — *Soit* E *un espace localement convexe convenable. Une courbe* $c : \mathbb{R} \to E$ *est* C^∞ *si pour tout* $l \in E^*$ *(dual topologique),* $l \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* C^∞*.*

Maintenant, on définit la notion de fonction C^∞ entre deux espaces localement convexes convenables E et F. On admet (cf [**KM97**]) que ceux-ci, munis de leur topologie, contiennent une base d'ouverts particuliers que l'on appelle c^∞-ouvert.

Définition 10. — *Soit* $U \subset E$ *un* c^∞*-ouvert et* $f : U \to F$ *une application entre deux convenient locally convex space. L'application* f *est* C^∞ *ssi pour toute courbe* C^∞ *de* E *c,* $f \circ c$ *est une courbe* C^∞ *de* F*.*

On peut voir ainsi que la "bonne" notion de différentiabilité qui va intervenir est la Gâteau-différentiabilité (cf [**KM97**], [**Ham82**]), c'est à dire seulement l'existence des dérivées directionnelles. C'est celle que l'on adopte pour définir les dérivées des fonctions.

Maintenant, soit M une variété. L'espace des applications $C^\infty(\mathbb{S}^1, M)$ muni de la famille de semi-normes p_n telles que $\forall f \in LM, p_n(f) = \sup_{\mathbb{S}^1}(f^{(n)})$ est un espace localement convexe convenable. On introduit alors les notations suivantes (cf [**Sta05**]).

Soient M et N deux variété et $f : M \to LN$ une application C^∞, on note $f^V : M \times \mathbb{S}^1 \to N$ l'application adjointe définie par :

$$\forall m \in M, x \in \mathbb{S}^1, \quad f^V(m, x) = f(m)(x)$$

On a alors le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.17. — *Une fonction $f : M \to LN$ est C^∞ ssi $f^V : M \times \mathbb{S}^1 \to N$ est C^∞.*

Ceci n'est qu'une réécriture de la loi exponentielle :

$$C^\infty(M, C^\infty(\mathbb{S}^1, N)) \approx C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, C^\infty(N))$$

Maintenant, il est intéressant de voir que plusieurs structures se lacent.

Soit $f : M \to N$ un morphisme. On notera $f^L : LM \to LN$ l'application induite sur les espaces de lacets, càd

$$\forall \gamma \in LM, \quad f^L(\gamma) = f \circ \gamma$$

Proposition 1.18. — *Si $f : M \to N$ est C^∞ alors $f^L : LM \to LN$ est C^∞.*

Proposition 1.19. — *Soit M une variété.*

$$T(LM) = L(TM)$$

De plus,

Proposition 1.20. — *Soit $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel orientable au dessus d'une variété M. Alors*

$$\pi^L : LE \to LM$$

est un fibré (locale trivialité) en $L\mathbb{R}$-modules au-dessus de LM.

Remarque. —

$$L\mathbb{R} = C^\infty(\mathbb{S}^1)$$

Et enfin,

Proposition 1.21. — *Soit $\nabla : Vect(M) \times E \to E$ une connexion sur le fibré E orientable, alors $\nabla^L : (LTM) \times LE \to LE$ définit une connexion sur le fibré LE et $\forall X \in LTM, \nabla^L_X : LE \to LE$ est $L\mathbb{R}$ linéaire.*

1.1.6. Structure de variété de Fréchet de LM. —

Maintenant, décrivons la topologie et la structure de variété de Fréchet des espaces de lacets. Puisqu'en dimension infinie continuité et infini-dérivabilité sont peu liées (on peut avoir des fonctions C^∞ qui ne sont pas continues...), l'idée est de définir dans un premier temps un atlas d'ouverts modelés sur des espaces de Fréchet avec des changements de cartes C^∞ entre espaces de Fréchet puis dans un deuxième temps de prendre la topologie engendrée par ces ouverts de cartes. On renvoie à [**Sta05**] pour le détail des résultats qui suivent.

Soit M une variété et $\eta : TM \to M$ une addition locale sur M, càd une application C^∞ telle que :

(i) Si s est la section nulle du fibré tangent, $\eta \circ s = id$.

(ii) Soit $\pi : TM \to M$ la projection canonique du fibré tangent, il existe un voisinage ouvert V de la diagonale $\Delta \subset M \times M$ tel que $\pi \times \eta : TM \to M \times M$ soit un difféomorphisme sur V.

Moyennant quelques transformations, on peut construire une addition locale à partir de l'exponentielle provenant d'une structure Riemanienne sur notre variété.

Maintenant pour chaque $\gamma \in LM$, on peut définir l'ouvert de carte U_γ suivant :

$$U_\gamma = \{\beta \in LM | (\gamma, \beta) \in LV\}$$

et on peut identifier $((\pi \times \eta)^L)^{-1}(U_\gamma) \subset LTM$ avec l'espace de Fréchet $\Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM)$. On notera $\Psi_\gamma : \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM) \to U_\gamma$.

On peut alors vérifier que les changements de cartes $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\gamma : \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM) \to \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\beta^*TM)$ sont bien des applications C^∞ entre espaces de Fréchet. A toute section $s \in \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM)$, elle associe la section $t : x \mapsto \eta(\beta(x))^{-1}(\eta(\gamma(x))(s(x)))$ avec $\forall p \in M, \eta(p) : T_pM \to M$ une application C^∞.

Enfin, un ensemble $W \subset LM$ sera ouvert ssi $\forall \gamma \in LM, \Psi^{-1}(W) \subset \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^*TM)$ est ouvert.

1.2. Rappels de Super-géométrie

Dans cette partie nous nous contenterons de rappeler et de définir les notions de supergéométrie dont nous aurons besoin dans la suite. De nombreux ouvrages traitent de ce sujet, certains de manière purement mathématique [**Lei80**], [**Lei83**] [**Man88**], [**Mic**], d'autre dans l'optique d'une application à la physique [**DEF$^+$99**], [**Var04**].

Il y a deux grandes approches de la supergéométrie. Une "à la DeWitt-Rogers" qui consiste à introduire une superstructure différentielle à l'aide de "supernumbers". Une autre, plus proche de la géométrie algébrique, en terme d'espaces annelés qui consiste à introduire sur des variétés clasiques, des variables impaires au niveau du faisceau de fonctions. La principale différence de ces points de vue, bien qu'équivalents [**Bat80**], est que la deuxième, contrairement à la première, conserve la topologie donnée par la variété sous-jacente.

Dans ce travail, nous choisissons la deuxième approche. Dans un premier temps, nous rappellons très brièvement des résultats d'algèbre superlinéaire afin d'introduire le Bérézinien dont nous avons besoin pour intégrer les superfonctions. Puis, en nous basant exclusivement sur [**BBHR91**], nous introduisons les super-variétés en terme d'espaces annelés comme une généralisation "naturelle" des variétés du point de vue de Grothendieck. Dans la suite, nous avons besoin de travailler en coordonnées pour généraliser les résultats précédents de classification des formes symplectiques sur les espaces de superlacets. Nous introduisons alors la notion de superdomaines [**Lei83**] et nous explicitons en coordonnées les objets géométriques habituels. Une autre description fondamentale des supervariétés est celle en tant que foncteur de points, c'est celle-ci qui nous permet d'introduire de manière canonique les variables impaires sur notre espace de superlacets. Enfin, nous décrivons les super-fibrés, notion fondamentale dans notre étude géométrique des espaces de superlacets.

1.2.1. Rappels succints d'algèbre linéaire graduée (ou superlinéaire). —

L'algèbre superlinéaire est l'étude des objets algébrique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués. Par exemple,

Définition 11. — *Un espace vectoriel E est un superespace vectoriel si il existe une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation telle que :*

$$E = E_0 \oplus E_1$$

Les morphismes de superespaces vectoriels sont les applications linéaires qui respectent la graduation. Si E et F sont deux superespaces et $l : E \to F$, un morphisme de superespace, alors :

$$\forall i \in \{0,1\}, \quad l(E_i) \subset F_i$$

Les éléments de E_0 sont appelés les éléments pairs et ceux de E_1 les éléments impairs. Soit $x \in E_i$, on note $|x| = i \in \{0,1\}$ sa parité. Si E_0 et E_1 sont de dimensions finies respectives p et q, on note simplement la dimension de E par $p|q$.

Les notions de superanneaux, supermodules, superalgèbres s'en déduisent naturellement en demandant simplement aux opérations de respecter la graduation.

$$E_i.E_j \subset E_{i+j}$$

Définition 12. — *Un superanneau A sera dit commutatif (ou supercommutatif) si*

$$\forall a, b \in A, \quad a.b = (-1)^{|a|.|b|} b.a$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, l'on n'écrira pas $|\cdot|$ pour la parité d'un élément si elle intervient dans l'exposant de (-1) : la relation précédente s'écrira simplement $a.b = (-1)^{a.b} b.a$. De plus, ces formules n'ont de sens que si la parité est bien définie, càd si les éléments a et b sont des éléments homogènes. On étend alors les formules par linéarité.

Ce principe de commutation sera d'ailleurs assez général pour obtenir des choix de signes consistants. Nous l'utiliserons pour déterminer les signes des formes symplectiques sur les espaces de superlacets.

Proposition 1.22. — ***Règle des signes***
Soit A et B deux superobjets, et $a \in A$, $b \in B$, si dans une expression a traverse b alors le signe $(-1)^{a.b}$ apparaît.

Dans les expressions, les signes apparaissent naturellement lorsque l'on demande aux objets de vérifier des propriétés de fonctorialité. Ainsi, il est possible de vérifier la consistance des signes en effectuant un changement de variable.

Le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux superespaces E et F est aussi un superespace muni de la graduation :

$$(E \otimes F)_k = \sum_{i+j=k} E_i \otimes E_j$$

L'isomorphisme entre $E \otimes F$ et $F \otimes E$ sera donné par $e \otimes f \mapsto (-1)^{e.f} f \otimes g$.

L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ sera muni de la graduation :

$$(\mathcal{L}(E, F))_i = \{f \in \mathcal{L}(E, F) | \forall j,\ f(E_j) \subset F_{i+j}\}$$

Les applications linéaires entre superespaces de dimension finie ont aussi une représentation matricielle. La parité de la matrice est celle de l'application linéaire. Chaque ligne a donc une parité qui correspond à la parité de l'élément de base du super-espace d'arrivée et chaque colonne a une parité qui correspond à la parité de l'élément de base du super-espace de départ.

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice, la parité de M est donnée par $|M| = |i| + |j| + |m_{ij}|$.

En général, on ordonne les éléments de base en considérant d'abord les vecteurs de base pairs puis les vecteurs de base impairs. Ceci permet de mettre toute matrice sous la forme canonique de matrices par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Si M est paire, les entrées des matrices A et D sont paires et celles de B et C impaires. Si M est impaire, c'est le contraire.

Le produit MN de deux matrices M et N est possible ssi la parité de la i^{me} colone de M est la même que celle de la i^{me} ligne de N. Le produit est alors le produit matriciel habituel.

Dans les cas des supermodules, on fera bien attention à distinguer coordonnées à droite et coordonnées à gauche. En effet, tout vecteur v d'un A-supermodule de dimension finie de base (e_i), où A est un superanneau, peut s'écrire $v = v^i e_i$ ou $v = e_i v'^i$ avec $v^i, v'^i \in A$. On a alors $v^i = (-1)^{e_i.v^i} v'^i$.

On peut maintenant introduire les deux équivalents impairs de la trace et du déterminant que l'on appellera respectivement supertrace et Bérézinien, en l'honneur d'un des pionniers de la supergéométrie Felix Alexandrovich Berezin [**Shi07**].

Définition 13. — *Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une (super)matrice. La supertrace $str(M)$ de M est définie par la formule*

$$str(M) = tr(A) - (-1)^M tr(D)$$

On remarque que si M est une matrice non super, on retrouve la trace habituelle. On peut se demander d'où provient le signe $-(-1)^M$ de $-(-1)^M tr(D)$.

Regardons M comme l'endomorphisme m d'un A-supermodule E de dimension finie muni d'une base e_i de base duale e^{*j} à gauche càd $e^{*j}(e_i) = \delta^i_j$. On peut alors écrire l'endomorphisme sous la forme : $m = \sum_{ij} e_i m_{ij} e^{j*}$. Soit $a \in A$, si on multiplie par a le morphisme, on obtient alors $a\, m = \sum_{ij} (-1)^{a.i} e_i a\, m_{ij} e^{j*}$. Autrement dit, (cf [**Lei83**]) la multiplication par un scalaire a correspond à la multiplication par la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} aId & 0 \\ 0 & -aId \end{pmatrix}$$

Sans le signe dans la formule, la supertrace ne serait donc pas linéaire!

Fonctoriellement (cf [**DEF$^+$99**]), l'on regarde la trace comme l'application composée des applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} str & : & E \otimes E^* & \to & E^* \otimes E & \to & A \\ & & f \otimes g^* & \mapsto & (-1)^{fg} g^* \otimes f & \mapsto & (-1)^{f.g} g^*(f) \end{array}$$

Et ainsi,

$str(m) = \sum_{ij} (-1)^{i.(m_{ij}+j)} m_{ij} e^{j*}(e_i) = \sum_i (-1)^{i.(m_{ii}+i)} m_{ii} = \sum_i (-1)^{i.(M)+i} m_{ii} = tr(A) - (-1)^M tr(D)$.

Comme pour la trace, on aura la propriété de (super)commutativité suivante :

Proposition 1.23. — *Soit M et N, deux supermatrices, alors*

$$str(MN) = (-1)^{M.N} str(NM)$$

On notera $GL_{m|n}(A)$ l'ensemble des matrices carrées inversibles à coefficients dans un superanneau A dont les m premières lignes sont paires et les n dernières impaires. Soit $\mathcal{N}$ l'idéal des éléments nilpotents de A et notons $\pi : A \to A/\mathcal{N}$ la projection. Si M est une matrice à coefficients dans A, on notera $\pi(M)$ la matrice dont les entrées sont dans $A/\mathcal{N}$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.24. — *Une matrice M est inversible ssi $\pi(M)$ est inversible.*

Corollaire 1.25. — *Une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est dans $GL_{m|n}(A)$ ssi $det(A)det(D) \neq 0$*

Démonstration. — Si M est paire alors $\pi(B) = \pi(C) = 0$ et ainsi $\pi(M) = \begin{pmatrix} \pi(A) & 0 \\ 0 & \pi(D) \end{pmatrix}$. Donc M est inversible ssi $\pi(A)$ et $\pi(D)$ sont inversibles. On conclut avec le lemme. □

On veut maintenant construire le Bérézinien $Ber : GL_A(m|n) \to GL_{1|0}(A)$ comme l'analogue super du déterminant, vérifiant les formules :

$$\forall M, N, Ber(MN) = Ber(M)Ber(N)$$

et

$$\forall M, Ber(e^M) = e^{str(M)}$$

La dernière laisse supposer que si M est diagonale et inversible, $Ber(M) = \dfrac{det(A)}{det(D)}$ est un bon candidat. En effet, on a :

Définition 14. — *Soit A un superanneau et $GL_{m|n}(A)$ l'anneau des supermatrices paires inversibles. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{m|n}(A)$. Le Bérézinien est le morphisme d'anneau de $GL_A(m|n) \to GL_{1|0}(A)$ défini par :*

$$Ber(M) = \frac{det(A - BD^{-1}C)}{detD}$$

D'après le corrollaire précédent, le Bérézinien est bien défini. On renvoi à [**Man88**], [**Lei80**] pour une démonstration de la proposition de morphisme.

1.2.2. Supervariétés. —

Maintenant l'on cherche à introduire une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation sur les variétés. Si cette opération semble difficile en terme de points, elle se réalise naturellement en terme de fonctions et la géométrie algébrique offre un cadre et un formalisme naturels à la formulation des supervariétés. Nous commençons donc par quelques rappels de géométrie algébrique que l'on trouve dans [**BBHR91**].

Soit A un anneau, le spectre de A noté $Spec(A)$ est l'ensemble des idéaux premiers de A. Celui-ci est muni d'une topologie, la topologie de Zariski engendrée par la base de fermée $V(f) = \{(I) \in Spec(A) | f \in \mathcal{I}\}$ avec $f \in A$.

Si P est une $\mathbb{R}$-algèbre, on peut définir son spectre réel $Spec_{\mathbb{R}}(P) \subset Spec(P)$ qui est l'ensemble des idéaux maximaux $\mathcal{I}$ tels qu'il existe un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre $\phi : P \to \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{I} = Ker(\phi)$. Cet espace est muni de la topologie de Zariski induite.

Dans le cas d'une variété X, $\forall x \in X$, on peut définir l'évaluation en x qui est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre :

$$\begin{array}{cccc} ev_x & : & C^\infty(X) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \to & f(x) \end{array}$$

On note $\mathcal{M}_x = Ker(ev_x)$. On a :

Proposition 1.26. — *Si X est une variété différentiable alors l'application*

$$\begin{array}{ccccc} \beta & : & X & \to & Spec_{\mathbb{R}}(C^\infty(X)) \\ & & x & \to & \mathcal{M}_x \end{array}$$

est un homéomorphisme.

De plus, on a :

Corollaire 1.27. — *Soient X et Y deux variétés, alors on a une bijection entre les morphismes de variétés $Hom(X, Y)$ et les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres $Hom_{\mathbb{R}-alg}(C^\infty(Y), C^\infty(X))$.*

Autrement dit, toute l'information sur la variété X est codée par son algèbre de fonctions $C^\infty(X)$.

Soit $\mathcal{N}$ l'idéal des éléments nilpotents d'un anneau ou superanneau A, on a que $Spec(A) = Spec(A/\mathcal{N})$, et ainsi l'ajout d'éléments nilpotents à une algèbre de fonctions ne modifie pas l'espace de points X ni sa topologie, mais cela enrichit la structure de la variété. On introduit alors la notion d'espace annelé.

Définition 15. — *Soit A un superanneau commutatif. Un espace annelé est un couple $(X, \mathcal{A})$ où X est un espace topologique et $\mathcal{A}$ un faisceau de A-algèbres commutatives sur X.*

Un morphisme entre deux espaces annelés $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ est couple (f, ϕ) où

$$f : X \to Y \quad \textit{est une application continue}$$

$$\phi : \mathcal{B} \to f_*(\mathcal{A}) \quad \textit{est un morphisme pair de faisceaux de } \mathbb{R} - \textit{algèbre}$$

Dans la suite nous aurons besoin d'une notion un peu plus forte, celle d'espace localement annelé.

Définition 16. — *Un espace annelé $(X, \mathcal{A})$ est dit localement annelé si en chaque point $x \in X$, le germe $\mathcal{A}_x$ du faisceau $\mathcal{A}$ en x est un anneau local càd qu'il existe un seul idéal maximal.*

Un morphisme d'espace localement annelé est un morphisme d'espace annelé (f, ϕ) tel que ϕ induit un morphisme d'anneau local sur les germes càd qu'il envoie idéal maximal sur idéal maximal.

Les variétés X, C^∞ munies de leurs faisceaux structuraux $\mathcal{O}_X$, le faisceau des fonctions C^∞, sont un premier exemple d'espace localement annelé. En chaque point $x \in X$, l'idéal maximal est l'idéal $\mathcal{M}_x = Ker(ev_x)$ des fonctions qui s'annulent en x.

Si f est une application C^∞ entre deux variétés X et Y, celle-ci induit naturellement un morphisme de faisceau

$$\begin{array}{rcccc} f^* & : & \mathcal{O}_Y & \to & f_*\mathcal{O}_X \\ & & g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

On obtient donc un morphisme d'espace annelé (f, f^*) et puisque $f^*(\mathcal{I}_x) = \mathcal{I}_{f(x)}$, c'est bien un morphisme d'espace localement annelé. Dans le cas des variétés, ce sont les seuls d'après le corollaire précédent. En effet, les faisceaux structuraux des variétés étant fins, le morphisme de faisceau f^* est complètement défini par le morphisme d'algèbre $f_Y^* : C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$.

Un autre exemple d'espace localement annelé et qui sera fondamental pour définir les supervariétés sera celui des superdomaines. On note $\Lambda(q)$ l'algèbre grasmannienne de dimension q. Il s'agit d'une super-algèbre commutative engendrée par q éléments $\xi^1, \cdots, \xi^q$ impairs qui vérifient donc $\xi^\alpha \xi^\beta = -\xi^\beta \xi^\alpha$.

Définition 17. — *Un superdomaine de dimension $\mathbb{R}^{p|q}$, noté $\mathbb{R}^{p|q}$ est l'espace localement annelé $(\mathbb{R}^p, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^p} \otimes \Lambda(q))$*

Pour chaque superdomaine, en chaque point $x \in \mathbb{R}^p$, l'idéal maximal est donné par l'idéal engendré par $\mathcal{I}_x$ et les $\xi^1, \cdots, \xi^k$, càd les éléments nilpotents.

Les superdomaines sont aux supervariétés ce que les domaines de cartes sont aux variétés. On peut donc construire une supervariété par recollement de superdomaines [**Lei80**], [**Lei83**] ou par :

Définition 18. — *Une supervariété M de dimension $p|q$ est un espace localement annelé $(|M|, \mathcal{O}_M)$ localement isomorphe au superdomaine $\mathbb{R}^{p|q}$.*

On note parfois $M^{p|q}$ pour préciser la dimension de M. Soit $\mathcal{N}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_M$ d'idéaux formés des éléments nilpotents. L'espace annelé $(|M|, \mathcal{O}_M/\mathcal{N})$ est localement isomorphe au superdomaine $(\mathbb{R}^p, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^p})$. Il s'agit donc d'une variété que l'on note $\overline{M}$ et que l'on appelle variété sous-jacente à la supervariété M. En général, on définit directement une supervariété comme une variété $\overline{M}$ munie d'un faisceau de superalgèbres $\mathcal{O}_M$ localement isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_{\overline{M}} \otimes \Lambda(q)$.

On note $\pi_M : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M/\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\overline{M}}$ la projection. Celle-ci définit une injection de $\overline{M} \hookrightarrow M$ de la variété $\overline{M}$ dans M. Un morphisme de supervariété est simplement un morphisme d'espaces localement annelés. On a alors :

Proposition 1.28. — *Soient M et N deux supervariétés et $(f, \phi) : M \to N$ un morphisme de supervariétés.*
- *L'application $f : \overline{M} \to \overline{N}$ est un morphisme de variété C^∞.*
- $\pi_M \circ \phi = f^* \circ \pi_N$
- *Le morphisme (f, ϕ) est complètement déterminé par ϕ.*

Démonstration. — On utilise le fait que le morphisme est un morphisme d'espace localement annelé, que l'idéal $\mathcal{N}$ est inclus dans tout idéal maximal, que $Spec(\mathcal{O}_M) = Spec(\mathcal{O}_{\overline{M}})$ ainsi que les résultats précédents sur les variétés. □

Dans la suite on note $\phi = (\overline{\phi}, \phi^*)$ un morphisme de supervariétés.

Donnons quelques exemples de supervariétés.
- Par définition, tout superdomaine est une supervariété.
- Une variété de dimension p est une supervariété de dimension $p|0$
- Une supervariété de dimension $0|q$ est simplement un point muni de l'algèbre grasmanienne $\Lambda(q)$.
- Tout fibré vectoriel E de rang q au dessus d'une variété M de dimension p définit une supervariété de dimension $p|q$ donnée par l'espace annelé $(M, \Gamma_M(\Lambda^* E^*))$ où $\Gamma_M(\Lambda^* E^*)$ est le faisceau des sections de l'algèbre extérieure du dual muni de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation induite par la $\mathbb{Z}$ graduation de $\Lambda^* E^*$.

En fait, il existe même une réciproque à l'exemple précédent car l'on peut associer à toute supervariété M un fibré au dessus de $\overline{M}$ défini comme le faisceau localement libre $\mathcal{N}/\mathcal{N}^2$ au dessus de $\overline{M}$. On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des supervariétés **SM** dans celle des fibrés vectoriels **VB**.

Cependant l'application qui à une supervariété associe un fibré n'est pas canonique, en fait elle dépend du choix d'une injection de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ dans $\mathcal{O}_M$. Par contre, elle induit une bijection entre les classes d'isomorphismes. Néanmoins, comme nous le verrons dans la sous-section suivante, l'espace des morphismes de supervariétés (et c'est ce qui nous intéresse) est beaucoup plus riche que celui des fibrés vectoriels, et il n'existe donc pas d'équivalence de catégories entre **SM** et **VB**.

Ces résultats sont connus sous le nom de **Théorème de Batchelor** (voir [**Bat79**]). Dans la suite, afin d'avoir une formulation intrinsèque, l'on n'utilisera donc pas ce théorème.

1.2.3. Supervariétés en coordonnées locales. —

Le principal intérêt des superdomaines est qu'ils permettent de travailler en coordonnées locales.

Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ un superdomaine. Soit $x^1, \cdots, x^p$ un système de coordonnées (paires) sur $\mathbb{R}^p$ et $\xi^1, \cdots, \xi^q$ un système de générateurs de l'algèbre grasmanienne $\Lambda(q)$. L'ensemble (x^i, ξ^α) est appelé système de coordonnées du superdomaine $\mathbb{R}^{p|q}$.

Toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{p|q}}$ s'écrit alors:

$$f = \sum_{k=0}^{q} \sum_{1 \leq \mu^1 < \cdots < \mu^k \leq q} f_{\mu^1 \cdots \mu^k} \xi^{\mu^1} \cdots \xi^{\mu^k}$$

avec $f_{\mu^1 \cdots \mu^k} \in C^\infty(\mathbb{R}^p), \forall 1 \leq \mu^1 < \cdots < \mu^k \leq q$.

Dans la suite on notera plutôt,

$$f = \sum_I f_I \xi^I$$

où I parcourt les multi-indices.

Définition 19. — *Tout système de p fonctions paires (y^j) et de q fonctions impaires η^β de $C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes \Lambda(q)$ est appelé système de coordonnées de $\mathbb{R}^{p|q}$ ssi $\pi_{\mathbb{R}^{p|q}}(y^j)$ est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^p$ et si $\forall x \in \mathbb{R}^p$ les $\eta^\beta(x)$ engendrent $\Lambda(q)$.*

Le principal intérêt d'un système de coordonnées réside dans la proposition suivante similaire au cas classique.

Proposition 1.29. — *Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ et $\mathbb{R}^{m|n}$ deux superdomaines et (x^i, ξ^α) un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{p|q}$. Soit $\phi = (\overline{\phi}, \phi^*)$ un morphisme de superdomaines de $\mathbb{R}^{p|q}$ dans $\mathbb{R}^{m|n}$.*

Le morphisme ϕ est complètement défini par les images $\phi^*(x^i), \phi^*(\xi^\alpha) \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \otimes \Lambda(n)$ du système de coordonnées.

La démonstration de cette proposition est très intéressante (cf **[Lei80]**) puisqu'elle montre comment calculer explicitement $\phi^*(f)$ à partir de $\phi^*(x^i)$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$.

En effet, si (y^j, η^β) est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{m|n}$, on a :

$\phi^*(x^i) = x^i \circ \overline{\phi} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1 \leq \mu^1 < \cdots < \mu^{2k} \leq q} x^i_{\mu^1 \cdots \mu^{2k}}(y^j) \eta^{\mu^1} \cdots \eta^{\mu^{2k}}$

Toute la partie $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{1 \leq \mu^1 < \cdots < \mu^{2k} \leq q} x^i_{\mu^1 \cdots \mu^{2k}}(y^j) \eta^{\mu^1} \cdots \eta^{\mu^{2k}}$ est nilpotente. C'est d'ailleurs elle qui distingue les morphismes de supervariétés des morphismes des fibrés qui apparaissent dans le Théorème de Batchelor où cette partie nilpotente est nulle. On la note n^i.

L'idée est que cette partie nilpotente peut être traitée comme une déformation. Notons pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^p)$, $P(f)(X^1, \cdots X^p)(x)$ la série formelle de Taylor au point x. On a alors :

$$\forall f(x^i) \in C^\infty(\mathbb{R}^p),\ \phi^*(f) = f(\phi^*(x^i)) = f(x^i \circ \overline{\phi} + n^i) = P(f)(n^1, \cdots, n^p)(x^i \circ \overline{\phi})$$

Et puisque les n^i sont nilpotents, $P(f)(n^1, \cdots, n^p)(x^i \circ \overline{\phi})$ est en fait une somme finie et donc la fonction $\phi^*(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^{m|n})$ est bien définie.

Comme dans le cas classique, ces résultats se généralisent directement aux supervariétés en terme d'ouverts de cartes et de coordonnées locales. L'on pourra donc étudier localement les morphismes entre supervariétés mais aussi les objets géométriques que nous allons introduire.

On pourra aussi remarquer que pour toute supervariété M le faisceau $\mathcal{O}_M$ est fin car pour tout atlas de la supervariété, on peut trouver une partition de l'unité subordonnée. Un morphisme de supervariétés $X \to Y$ sera aussi complètement défini par le morphisme de superalgèbres $C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$ avec $C^\infty(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$. L'on se permettra donc l'abus de notation consistant à ne pas distinguer le morphisme d'algèbre du morphisme de faisceau.

1.2.4. Champs de vecteurs, formes. —

Définition 20. — *Soit R un superanneau et A une R-superalgèbre. Une dérivation d de A est une application R-linéaire de A dans A telle que :*

$$\forall a, b \in A, \quad d(a\ b) = da\ b + (-1)^{a.d} a\ db$$

Définition 21. — *Soit M une supervariété. Le fibré tangent de M est simplement le faisceau $Der(\mathcal{O}_M)$ des dérivations de $\mathcal{O}_M$ en tant que $\mathbb{R}$-algèbre.*

Proposition 1.30. — *Soit $M^{p|q}$ une supervariété. Le faisceau $Der(\mathcal{O}_M)$ est un $\mathcal{O}_M$-module à gauche localement libre de dimension $p|q$.*

Si U est un ouvert de carte muni d'un système de coordonnées (x^i, ξ^α), tout élément $X \in Der(\mathcal{O}_M)|_U$ s'écrit :

$$X = X^i \partial_{x^i} + X^\alpha \partial_{\xi^\alpha}$$

avec $X^i, X^\alpha \in \mathcal{O}_M$

Dans la suite, on écrira un système de coordonnées sur une supervariété (u^i) où certaines fonctions u^i sont paires et d'autres impaires. Un champ de vecteurs X s'écrira alors simplement $X = X^i \partial_i$.

Puisqu'une supervariété est un espace localement annelé, on peut alors définir sans ambiguité l'espace tangent d'une supervariété M en un point $x \in \overline{M}$. On notera $\mathcal{I}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_M$ engendré par $\mathcal{N}$ et les fonctions qui s'annulent en x. On a alors :

Définition 22. — *Soit M une supervariété de dimension $p|q$ et $x \in \overline{M}$. L'espace tangent T_xM de M en x est le quotient :*

$$T_xM = TM/\mathcal{I}_x\ TM$$

Proposition 1.31. —
- *L'espace tangent T_xM est un $\mathbb{R}$-superespace vectoriel de dimension $p|q$.*
- *Si $x \in U$ avec U un ouvert de carte muni d'un système de coordonnées (x^i, ξ^α), tout élément $X \in T_xM$ s'écrit*

$$X = X^i \partial_i$$

avec $X^i \in \mathbb{R}$
- *Un vecteur tangent X en x est une dérivation le long du morphisme $ev_x \circ \pi_M$, càd*

$$\forall f, g \in C^\infty(M), \quad X(f\ g) = X(f)\ \pi_M(g)(x) + (-1)^{X.f} \pi_M(f)(x)\ X(g) \in \mathbb{R}$$

Dans la suite l'on travaillera en coordonnées locales. Il est donc capital de savoir comment se transforment les champs de vecteurs dans un changement de système de coordonnées.

Proposition 1.32. — *Soient (u^i) et (v^j) deux systèmes de coordonnées locales sur une supervariété M. Soit $X = X^i\partial_{u^i} = X'^j\partial_{v^j}$ un champs de vecteurs, alors :*

$$X'^j = X^i\frac{\partial v^j}{\partial u^i}$$

Si $X = X^i\partial_{u^i} = X'^j\partial_{v^j}$ est un vecteur tangent en un point $x \in \overline{M}$, alors :

$$X'^j = X^i\pi_M(\frac{\partial v^j}{\partial u^i})(x)$$

Proposition 1.33. — *Soient $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ deux champs de vecteurs. Le crochet de Lie $[X, Y]$ est le champs de vecteurs de coordonnées :*

$$[X, Y]^j = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - (-1)^{X.Y}Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}$$

L'on peut maintenant introduire le complexe de De Rham des formes différentielles par dualité. L'on suivra les notations de Tuynman [**Tuy10**].

Définition 23. — *Soit M une supervariété. Le faisceau des 1-forme $\Omega^1(M)$ est le faisceau dual à droite de TM, càd*

$$\Omega^1(M) = Hom_{\mathcal{O}_M}(TM, \mathcal{O}_M)$$

et on écrit l'évaluation d'une 1-forme β sur un champs de vecteur X comme un produit intérieur :

$$\iota(X)\beta \in \mathcal{O}_M$$

De la proposition 4.3.10, on déduit :

Proposition 1.34. — *Soit $M^{p|q}$ une supervariété. Le faisceau $\Omega^1(M)$ est un $\mathcal{O}_M$-module à droite localement libre de dimension $p|q$.*

Si U est un ouvert de carte muni d'un système de coordonnées (u^i), tout élément $\beta \in \Omega^1(M)$ s'écrit :

$$\beta = du^i\beta_i$$

avec $\beta_i \in \mathcal{O}_M$

Les parités des éléments u^i, ∂_{u^i} et du^i sont identiques. On la note simplement i lorqu'elle apparaitra en exposant dans les formules, càd $|u^i| = |\partial_{u^i}| = |du^i| = i$

Un point délicat est l'introduction de l'algèbre extérieure d'un superespace. Celle-ci possède une $\mathbb{Z}$ graduation naturelle par le degrès du produit mais aussi une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation engendrée par le superespace. Cette dernière est différente de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation engendrée par la $\mathbb{Z}$ graduation.

Une première version consiste à ne considérer qu'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ graduation où la parité d'un élément est donné par la somme de son degré en tant que forme et sa parité (le tout modulo 2). L'avantage de cette version est que l'on obtient ainsi une superalgèbre commutative comme dans le cas classique. On la trouve dans [**Lei83**].

Cependant, ce n'est pas la version que l'on choisit et l'on considére les deux graduations séparément (cf [**Mic**]). En d'autres termes, tout élément ω de l'algèbre extérieure a un degré $k \in \mathbb{Z}$ et une parité $|\omega| \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et si ω_1 et ω_2 sont respectivement une k_1 et k_2 formes, on a :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{k_1.k_2+|\omega_1|.|\omega_2|}\omega_2 \wedge \omega_1$$

Dans l'autre cas, l'on aurait eu $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{(k_1+|\omega_1|).(k_2+|\omega_2|)}\omega_2 \wedge \omega_1$.

Définition 24. — *Soit M une supervariété. Le faisceau des formes différentielles sur M est le faisceau $\Omega^*(M)$ défini par :*

$$\Omega^*(M) = \Lambda^*(\Omega^1(M))$$

Proposition 1.35. — *Soit u^i un système de coordonnées locales sur M. Alors localement toute forme ω d'ordre $k \in \mathbb{Z}$ s'écrit :*

$$\omega = du^{i_k} \cdots du^{i_1}\omega_{i_k\cdots i_1}$$

avec $\omega_{i_k\cdots i_1}$ complètement antisymétrique càd

$$\forall 1 \leq l < k, \omega_{i_k\cdots i_{l+1}i_l\cdots i_1} = -(-1)^{i_l.i_{l+1}}\omega_{i_k\cdots i_l i_{l+1}\cdots i_1}$$

On peut maintenant évaluer k champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_k$ sur une k-forme ω vue comme une forme k-linéaire alternée. On écrit :

$$\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega$$

et on a :

Proposition 1.36. —

$$\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega = (-1)^{\sum_{m=2}^{k}(X_m^{i_m}.\sum_{n<m} i_n)}X_1^{i_1}, \cdots, X_k^{i_k}\omega_{i_k\cdots i_1}$$

Le signe de la formule précédente s'explique de la manière suivante. L'évaluation se fait par récurrence. On évalue d'abord $\iota(X_k)$ avec du^{i_k} pour donner $X_k^{i_k}$. Ce terme traverse alors $du^{i_{k-1}} \cdots du^{i_1}$ donnant alors la $k-1$ forme $\iota(X_k)\omega = (-1)^{X^{i_k}.(i_{k-1}+\cdots+i_1)}du^{i_{k-1}} \cdots du^{i_1}X_k^{i_k}\omega_{i_k\cdots i_1}$. Puis on évalue $\iota(X_{k-1})(\iota(X_k)\omega)$ pour obtenir une $k-2$ forme et ainsi de suite.

Enfin, dans un changement de variables, les coordonnées des k-formes se transforment de la manière suivante.

Proposition 1.37. — *Soient (u^i) et (v^j) deux systèmes de coordonnées locales sur une supervariété M. Soit $\omega = du^{i_k} \cdots du^{i_1}\omega_{i_1\cdots i_k} = dv^{j_k} \cdots dv^{j_1}\omega'_{j_1\cdots j_k}$ une k forme sur M. Alors :*

$$\omega'_{j_1\cdots j_k} = (-1)^{\sum_{m=2}^{k}((i_m+j_m).\sum_{n<m} i_n)}\frac{\partial u^{i_1}}{\partial v^{j_1}} \cdots \frac{\partial u^{i_k}}{\partial v^{j_k}}\omega_{i_k\cdots i_1}$$

Comme dans le cas classique, l'espace des formes différentielles muni de la différentielle extérieure d forme un complexe où d est définie par la formule habituelle adaptée au cas super, d'une part en ajoutant les signes supplémentaires simplement en suivant la règle des signes et d'autre part, en ajoutant le facteur $(-1)^k$ (ajouté par Tuynman). Ce dernier provient du choix d'écrire l'évaluation des k-formes $\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega$ et non pas $\omega(X_1, \cdots, X_k)$, qui diffère, si tous les champs de vecteurs sont pairs, d'un facteur

$(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$. De manière à obtenir une formule valable dans le cas non-super, il faut alors rajouter le facteur $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(-1)^{\frac{(k+1)k}{2}} = (-1)^k$.

On a ainsi :

Définition 25. — *Soit $\omega \in \Omega^k(M)$ une k forme alors $d\omega$ est la $k+1$ème forme définie par : Pour tout champs de vecteurs $X_0, X_1, \cdots, X_k$,*

$$(-1)^k \iota(X_0, X_1, \cdots, X_k) d\omega = \sum_{i=0}^k (-1)^{i+\sum_{p<i} X_i.X_p} X_i.(\iota(X_0, \cdots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, X_{i+1}, \cdots, X_k)\omega)$$
$$+ \sum_{0\leq i<j\leq k} (-1)^{i+j+\sum_{i<p<j} X_p.X_j} \iota(X_0, \cdots, X_{i-1}, [X_i, X_j], X_{i+1}, \cdots, X_{j-1}, \widehat{X_j}, X_{i+1}, \cdots, X_k)\omega$$

Par exemple, les différentielles d'une 1-forme α et d'une 2-forme ω s'écrivent :

$$-\iota(X, Y)d\alpha = X(\iota_Y(\alpha)) - (-1)^{X.Y} Y(\iota_X(\alpha)) - \iota_{[X,Y]}\alpha$$

$$\begin{aligned} \iota(X, Y, Z)d\omega &= X(\iota(Y, Z)\omega) - (-1)^{X.Y} Y(\iota(X, Z)\omega) + (-1)^{Z.(X+Y)} Z(\iota(X, Y)\omega) \\ &\quad -\iota([X, Y], Z)\omega + (-1)^{Y.Z}\iota([X, Z], Y)\omega - (-1)^{X.(Y+Z)}\iota([Y, Z], X)\omega \end{aligned}$$

ou en coordonnées :

$$(d\alpha)_{ij} = (-1)^{i.j}\partial_i \alpha_j - \partial_j \alpha_i$$

et

$$(d\omega)_{ijk} = \partial_k(\omega_{ij}) - (-1)^{j.k}\partial_j(\omega_{ik}) + (-1)^{i.(j+k)}\partial_i(\omega_{jk})$$

Dans le cas d'une k-forme β, on aura :

$$(d\beta)_{i_0\cdots i_k} = \sum_{m=0}^k (-1)^{m+\sum_{n>m} i_m.i_n} \partial_m(\beta_{i_0\cdots, i_{m-1}, \widehat{i_m}, i_{m+1}, \cdots, i_k})$$

Ces formules ne semblent pas respecter la règle des signes... En fait, si on considère l'opérateur ∂ écrit à droite, càd qui agit par la droite, les formules retrouvent leur équilibre :

$$(d\beta)_{i_0\cdots i_k} = \sum_{m=0}^k (-1)^{\sum_{n>m} i_m.i_n} (\beta_{i_0\cdots, i_{m-1}, \widehat{i_m}, i_{m+1}, \cdots, i_k})_m \partial$$

Pour terminer l'on peut donner, la définition d'une forme symplectique sur une supervariété.

Définition 26. — *Soit M une supervariété.*

Une forme symplectique ω sur M est une 2-forme fermée telle que l'application :

$$\begin{array}{rcccl} \omega^\sharp & : & TM & \to & T^*M \\ & & X & \to & \iota(X)\omega \end{array}$$

est un isomorphisme de superfibrés.

On renvoie au §1.2.6 pour la définition des superfibrés.

1.2.5. Intégration sur les supervariétés. —

L'intégration sur les supervariété est dûe à Félix Alexandrovich Berezin, (cf [**Shi07**], [**Rog06**]).

Contrairement au cas classique, si M est une supervariété, le complexe $\Omega^*(M)$ n'est pas borné : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Omega^k(M) \neq 0$. En effet, si ξ^α est une variable impaire, $d\xi^\alpha \wedge d\xi^\alpha \neq 0$.

Pour remédier à ce problème, on introduit le faisceau des formes volumes.

L'on définit d'abord l'intégration sur un superdomaine dans un système de coordonnées donné. Ce résultat est indépendant du système de coordonnées choisi et peut donc s'étendre à toute la supervariété.

Définition 27. — *Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ un superdomaine. Une orientation sur ce superdomaine est simplement une orientation sur $\mathbb{R}^p$.*

Soit $u^i = (x^i, \xi^\alpha)$ et $v^j = (y^j, \eta^\beta)$ deux systèmes de coordonnées sur un superdomaine $\mathbb{R}^{p|q}$.

On peut définir la matrice

$$J(v,u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} & \dfrac{\partial \eta^\beta}{\partial x^i} \\ \dfrac{\partial y^j}{\partial \xi^\alpha} & \dfrac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice paire inversible. On peut donc calculer son Bérézinien et on note :

$$\frac{D(v)}{D(u)} = Ber(J(u,v))$$

Définition 28. — *Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ un superdomaine et (u^i) un système de coordonnées. L'ensemble des formes volumes sur $\mathbb{R}^{p|q}$ noté $Vol(\mathbb{R}^{p|q})$ est l'ensemble des éléments*

$$\mu = f\Delta_u$$

tels que :
- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{p|q})$
- $|\Delta_u| = p - q \equiv 2$
- *Si (v^j) est un autre système de coordonnées, $\Delta_v = \dfrac{D(v)}{D(u)}\Delta_u$.*

On pourra ainsi identifier $Vol(\mathbb{R}^{p|q})$ à un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{p|q}}$-module de rang 1. En effet, par propriétés de $J(v,u)$ et du Bérézinien, si w est un autre système de coordonnées, $J(w,u) = J(w,v)J(v,u)$ et ainsi $\dfrac{D(w)}{D(u)} = \dfrac{D(w)}{D(v)}\dfrac{D(v)}{D(u)}$ ce qui permet de vérifier les conditions de cocycle. Par recollement, on obtient ainsi un faisceau $Vol(M)$ sur la supervariété M.

On peut maintenant définir l'intégration d'une forme volume sur un superdomaine.

Définition 29. — *Soit $\mathbb{R}^{p|q}$ un superdomaine muni d'une orientation, $(u^i = (x^i, \xi^\alpha))$ un système de coordonnées avec (x^i) un système de coordonnées sur $\mathbb{R}^p$ et $\mu = f\Delta_u$ une forme volume avec $f = \sum_{k=0}^q \sum_{1 \le \mu^1 < \cdots < \mu^k \le q} f_{\mu^1 \cdots \mu^k} \xi^{\mu^1} \cdots \xi^{\mu^k}$ une fonction **à support compact**, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^{p|q},(u^i)} \mu = \int_{\mathbb{R}^p} f_{12\cdots q} dx^1 \cdots dx^p$$

Autrement dit, l'on intègre sur $\mathbb{R}^p$ seulement le coefficient devant le facteur de degré maximal $\Pi_{i=1}^q \xi^i$.

Théorème 1.38. — *Le résultat de la formule précédente est indépendant du système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{p|q}$.*

On ne donnera pas la démonstration de ce théoréme (voir [**Lei80**]) mais seulement les idées principales et notamment deux lemmes fondamentaux dont le premier nous sera utile dans le chapitre suivant.

***Lemme 1.39* (Leites).** — *Il existe une unique action de $T\mathbb{R}^{p|q}$ sur $Vol(\mathbb{R}^{p|q})$ telle que pour tout $X \in T\mathbb{R}^{p|q}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{p|q})$ et $\rho \in Vol(\mathbb{R}^{p|q})$*
(i) $X(f\rho) = X(f)\rho + (-1)^{X.f} fX(\rho)$.
(ii) $(fX)(\rho) = (-1)^{X.f} X(f\rho)$.
(iii) *Pour tout système de coordonnées (u^i) de $\mathbb{R}^{p|q}$, $\partial_{u^i} \Delta_u = 0$.*

En fait, cette action n'est rien d'autre que la dérivée de Lie, L_X.

Derrière l'autre lemme, se cache le désir d'avoir une formule de Stokes sur les super-variétés. C'ést précisément le fil directeur qui amena Bérézin à définir son intégration. Celui-ci s'énonce alors :

Lemme 1.40. — *Soit $\rho \in Vol(\mathbb{R}^{p|q})$ une forme volume à support compact et $X \in T\mathbb{R}^{p|q}$ alors dans tout système de coordonnées (u^i),*

$$\int_{\mathbb{R}^{p|q},(u^i)} X(\rho) = 0$$

En un sens le dernier lemme impose la forme de la formule d'intégration. En effet, l'intégration est linéaire et si l'on cherche à intégrer un terme de la forme $f_{\mu^1\cdots\mu^k} \xi^{\mu^1} \cdots \xi^{\mu^k} \Delta_u$ avec $k < q$, ce terme peut aussi s'écrire $\partial_\xi^\beta(\xi^\beta f_{\mu^1\cdots\mu^k} \xi^{\mu^1} \cdots \xi^{\mu^k} \Delta_u)$ avec $\beta \neq \mu^m$ pour $1 \leq m \leq k$. Et l'intégrale de ce terme vaut alors 0.

1.2.6. Superfibrés. —

Il y a deux manières équivalentes de définir un (super)fibré vectoriel E au dessus d'une (super)variété M.

La première qui est une version géométrique, est de considérer une projection $\pi : E \to M$ munie de trivialisations où les termes "projection" et "trivialisations" sont à préciser, voir l'article "Super vector bundles" de Balduzzi, Carmeli et Cassinelli [**BCC11**] et [**Bar89**].

La seconde [**DEF$^+$99**] est de considérer un superfibré comme un faisceau de $C^\infty(M)$ modules localement libre. C'est l'approche que l'on choisit car elle nous permet de créer facilement à partir d'un superfibré, d'autres superfibrés et fibrés dont nous aurons besoin pour interpréter géométriquement les espaces de superlacets.

Remarque. — *Considérer un superfibré vectoriel E au dessus de M comme un faisceau de $C^\infty(M)$-module est trompeur. En effet, un morphisme de fibré vectoriel n'induit pas en général un morphisme des faisceaux de sections. Si l'on veut voir la catégorie* *des fibrés vectoriels comme un espace de faisceaux, il faut alors choisir le faisceau dual! Puisque d'une part, en dimension finie le dual du dual est isomorphe à l'espace de départ, l'on aura aucun mal à revenir en arrière! Et d'autre part, un morphisme de fibrés vectoriels induit bien un morphisme des faisceaux duaux de manière fonctorielle.*

Définition 30. — *Soit M une supervariété. Un fibré vectoriel F de rang $s|t$ au dessus de M est donné par un faisceau, noté encore F de $C^\infty(M)$-modules localement libres de dimension $s|t$ au dessus de $\overline{M}$.*

Localement, les sections de $F(U)$ sont de la forme $s = s^k f_k$ avec $s^k \in C^\infty(U)$ et les changements de carte des matrices paires de $GL_{s|t}(C^\infty(U))$. La donnée des ouverts de trivialisation et des changements de cartes détermine complètement le faisceau à isomorphisme près. En effet, ces dernières permettent de recoller les sections entre-elles. Les conditions de cocycle sur les applications de restriction se traduisent par les conditions habituelles sur les applications de recollement. Soient U_α et U_β deux ouverts de trivialisation, on note $\Psi_{\beta\alpha} \in M_{s|t}(C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta))$ l'application de recollement sur les intersections des ouverts de trivialisation $U_\alpha \cap U_\beta$ qui permet de passer de la carte U_α à U_β. Ces applications vérifient les relations de cocycle habituelles.

$$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad \Psi_{\beta\alpha}(x)\Psi_{\alpha\beta}(x) = Id$$

$$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\beta, \quad \Psi_{\gamma\alpha}(x) = \Psi_{\gamma\beta}(x)\Psi_{\beta\alpha}(x)$$

On pourra remarquer que ces relations restent valables si l'on prend les images des applications précédentes par des morphismes de super-algèbres, notamment $\pi_M^* : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_{\overline{M}}$ qui provient de l'injection $\iota_M : \overline{M} \to M$.

On peut alors associer de manière canonique à tout superfibré un fibré $\overline{F}$ (gradué) au-dessus de $\overline{M}$ qui sera le fibré donné par le faisceau quotient $\overline{F} = F/\mathcal{N}F$ où $\mathcal{N}$ est le faisceau des éléments nilpotents. Le faisceau $\overline{F}$ est bien un faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$-modules localement de type fini dont les sections sont de la forme : $s = s^k f_k$ avec $s^k \in C^\infty(\overline{U})$ et les changements de cartes les images des matrices précédentes par la projection π_M^*.

Remarque. — *Il faut bien faire attention à ne pas confondre pour un superfibré F, le fibré $\overline{F}$ avec la sous variété sous-jacente à la supervariété F, notée elle aussi $\overline{F}$. Un superfibré sera dans cette thèse toujours considéré comme un superfibré et non une supervariété afin d'éviter les confusions.*

On peut aussi remarquer que, en général, l'on ne peut pas voir de manière canonique le fibré sous-jacent $\overline{F}$ au dessus de $\overline{M}$ comme un sous-module de F. En effet, cela impliquerait une injection canonique de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ dans $\mathcal{O}_M$.

En terme de faisceau, il est alors très naturel d'introduire le fibré tiré en arrière par un morphisme de supervariété.

Soit $f : M \to N$ une application continue entre deux espaces topologiques et $\mathcal{F}$ un faisceau au-dessus de N. L'image réciproque $f^{-1}\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur M. On notera encore $f^{-1}\mathcal{F}$ le faisceau qu'il engendre.

De plus, on pourra remarquer que le faisceau structural $\mathcal{O}_M$ est un $f^{-1}\mathcal{O}_N$-module grâce à l'application $f^* : \mathcal{O}_N \to f_*(\mathcal{O}_M)$ qui induit une application $f^* : f^{-1}\mathcal{O}_N \to \mathcal{O}_M$.

Définition 31. — *Soit $\phi : M \to N$ un morphisme de supervariétés. Soit E un fibré au dessus de N. Le fibré ϕ^*E, le tiré en arrière de E par ϕ, est donné par le faisceau de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres :*

$$\phi^*E = \mathcal{O}_M \otimes_{\overline{\phi}^{-1}\mathcal{O}_N} \overline{\phi}^{-1} E$$

Pour toute section de ce fibré de la forme $f \otimes gs$ avec $g \in C^\infty(N)$ et $s \in F$, on a : $f \otimes gs = f\phi^*(g) \otimes s$.

Ce faisceau de $\mathcal{O}_M$-module est bien localement libre de dimension $s|t$. En effet, si V est un ouvert de M tel que $\overline{\phi}(V)$ soit inclus dans un ouvert de trivialisation, les sections sont de la forme $s = g \otimes s^k f_k = g\phi^*(s^k) \otimes f^k$. Et les applications de recollement sont naturellement les images par ϕ^* des applications de recollement de F. En effet, si dans une nouvelle base de sections $f'j$, on a $s'^i = s^k \Psi^i_k$, alors $s = g \otimes s^k f_k = g \otimes s'^i f'_i = g \otimes s^k \Psi^i_k f'_i = g\phi^*(s^k)\phi^*(\Psi^i_k) \otimes f^k$.

On voit ainsi que le fibré associé à ϕ^*F est bien le tiré en arrière $\overline{\phi}^* \overline{F}$ puisque ses sections sont localement de la forme : $s = \tilde{g} \otimes f^k$ avec les applications de recollement $\phi^*(\widetilde{\Psi^i_k}) = \tilde{\phi}^*(\widetilde{\Psi^i_k})$.

L'on peut maintenant définir un morphisme de superfibrés.

Définition 32. — *Soient M et N deux supervariétés et E et F deux superfibrés respectivement au-dessus de M et N. Un morphisme de fibrés χ est un couple d'applications (ϕ, φ) ou*

(i) *$\phi : M \to N$ est un morphisme de supervariétés.*
(ii) *$\varphi : E \to \phi^*(F)$ est un morphisme de supermodules localement libres.*

En quotientant par les éléments nilpotents, on voit que χ définit un morphisme des fibrés $\overline{E}$ et $\overline{F}$ au-dessus de l'application $\overline{\phi} : \overline{M} \to \overline{N}$.

En terme de coordonnées locales, pour tout ouvert U de trivialisation, le morphisme de faisceaux s'écrit comme une matrice $\varphi(U)^i_j$ avec ses coefficients dans $\mathcal{O}_M(U)$. La condition de compatibilité avec les changements de carte s'écrit alors de la manière suivante.

Soit V et V' deux ouverts de trivialisation de F tels que $U = \tilde{\phi}^{-1}(V)$ et $U' = \tilde{\phi}^{-1}(V')$ soient deux ouverts de trivialisations de E. Si l'on note $(\Psi_{U,U'})^j_k$ et $(\Psi_{V,V'})^k_i$ les matrices des applications de recollement sur E et sur F, on a :

$$\tilde{\phi}^*((\Psi_{V,V'})^k_i)(\varphi_U)^j_k = (\varphi_{U'})^k_i \ (\Psi_{U,U'})^j_k$$

A partir d'un superfibré, il est possible de construire naturellement des fibrés au dessus de $\overline{M}$ et d'autres superfibrés au dessus de M sous la condition qu'il existe un morphisme de faisceau injectif $\iota : \mathcal{O}_{\overline{M}} \to \mathcal{O}_M$ telle que $\pi^*_M \circ \iota = Id^*_M$ ce qui correspond à une projection $\pi_\iota : M \to \overline{M}$. Ce sera le cas de manière canonique pour les faisceaux triviaux où $\mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\overline{M}} \otimes \Lambda[\xi^1, \cdots, \xi^n]$ ou si la dimension impaire est égale à 1. Dans les autres cas, le théorème de Batchelor assure l'existence d'un tel morphisme.

En effet grâce à ι, si M est de dimension $m|n$, $\mathcal{O}_M$ est un $\mathcal{O}_{\overline{M}}$-module localement libre de dimension $0|n$. Ainsi si E est un fibré au dessus de M de rang $s|t$ alors E est un $\mathcal{O}_{\overline{M}}$-module localement libre de dimension $2^{n-1}(s+t)|2^{n-1}(t+s)$. Si e^i est une base locale de E et ξ^α une base locale de $\mathcal{O}_M$ alors pour tout multi-indice I les éléments $\xi^I e^i$ forment une base locale du fibré E au-dessus de $\overline{M}$.

On note ce nouveau fibré au dessus de $\overline{M}$ par $\widetilde{E^1_\iota}$ et si l'injection est canonique, on le note simplement $\widetilde{E^1}$.

Maintenant, grâce à ι et donc à la projection $\pi_\iota : M \to \overline{M}$ on peut tirer en arrière le faisceau $\widetilde{E}$ au dessus de $\overline{M}$ et obtenir un nouveau superfibré au-dessus de M. On le notera $E^1 = \pi_\iota^*(\widetilde{E^1})$ ou E^1_ι. Et puisque cette procédure est réapplicable on notera E^k ou E^k_ι les superfibrés itérés et $\widetilde{E^k_\iota}$ ou $\widetilde{E^k}$ les fibrés itérés. Chaque E^k sera de rang $2^{k(n-1)}(s+t)|2^{k(n-1)}(s+t)$.

Il est aussi intéressant de se demander si l'on peut définir des sous-superfibrés E_0 et E_1 respectivement de rang $s|0$ et $0|t$. En effet, par définition un fibré pair au dessus d'une vraie super-variété a des fibres impaires : l'ensemble des sections paires n'est pas un sous-module.

Dans le cas où il existe une injection $\iota : \mathcal{O}_{\overline{M}} \to \mathcal{O}_M$, on peut définir à partir de E des superfibrés E_0 et E_1 respectivement de rang $s|0$ et $0|t$. Cependant, d'une part, ce ne sont pas des sous-superfibrés puisque pour chaque ouvert U, les $E_i(U)$ ne sont pas des sous modules de $E(U)$ et d'autre part, on ne peut généralement pas reconstruire le superfibré E à partir des superfibrés E_0 et E_1.

Soit E un superfibré et $\overline{E}$ son fibré sous-jacent en super-espace vectoriel $\overline{E} = \overline{E}_0 \oplus \overline{E}_1$ au dessus de $\overline{M}$ où le sous-fibré $\overline{E}_i = (\iota_M^*(E))_i$ correspond au sous $\mathcal{O}_{\overline{M}}$-module des sections de parité i. On peut alors définir $E_i = \pi_\iota^* \overline{E_i}$. Les applications de changements de carte sont localement les images par ι des matrices par blocs des applications de changements de cartes de $\overline{E}$ qui proviennent des projections sur l'anneau des matrices de changements de cartes de E.

Proposition 1.41. — *Soit U et U' des ouverts de trivialisation d'un fibré E et soit Ψ l'application de recollement donné par la matrice :*

$$\begin{pmatrix} \Psi^i_j & \Psi^i_\alpha \\ \Psi^\beta & \Psi^\beta_\alpha \end{pmatrix}$$

alors
- *Sur E_0, l'application de recollement est donnée par $\iota \circ \pi_M^*(\Psi^i_j)$.*
- *Sur E_1, l'application de recollement est donnée par $\iota \circ \pi_M^*(\Psi^\beta_\alpha)$.*

Le sous-fibré sous-jacent à chaque E_i sera bien $\overline{E}_i$.

De plus, par construction, ces superfibrés s'identient à des sous-superfibrés de E^1 puisque ce sont les tirés en arrière par π_ι des sous-fibrés $\overline{E}_i$ vus comme sous-fibés de $\widetilde{E^1}$.

L'introduction du fibré $\widetilde{E^1}$ et plus particulièrement de certains de ses sous-fibrés (voir le chapitre suivant) nous a été nécéssaire pour déterminer une structure géométrique de Fréchet classique de l'espaces des superlacets.

En effet, si M est une supervariété, $C^\infty(M)$ est muni d'une structure d'espace de Fréchet. On peut le voir localement dans un ouvert de trivialisation U muni d'un système de coordonnées (u^i). Le fibré tangent $TU = Der(\mathcal{O}_U)$ engendre l'algèbre des multidérivations.

Pour tout compact $K \subset U$ et toute multidérivation ∂, on peut définir la semi-norme $|\ |_{K,\partial}$ sur $C^\infty(U)$ par:

$$\forall f \in C^\infty(U), \quad |f|_{K,\partial} = \sup_{p \in K} |\widetilde{\partial f}|$$

La famille de ces semi-normes munit ainsi l'espace $C^\infty(U)$ d'une structure d'espace de Fréchet (cf [**Kos77**]). Pour cela, il suffit d'extraire une exhaustion de compacts K_n de U car le nombre de dérivations de la forme $\partial^{i_n i_{n-1} \dots i_1}$ est dénombrable. De plus, comme M est de dimension finie, les familles de semi-normes à K fixé définissent une topologie équivalente quel que soit le système de coordonnées choisi.

Explicitement, une famille de fonction $f_t = \sum_I f_t^I \xi^I \in C^\infty(U)$ converge vers $f = \sum_I f^I \xi^I \in C^\infty(U)$ ssi toutes les familles de fonctions $f_t^I \in C^\infty(\overline{U})$ convergent vers f^I où $C^\infty(\overline{U})$ est un espace de Fréchet.

Maintenant si E est un superfibré de dimension finie au-dessus d'une supervariété M, il ne suffit pas, comme dans le cas classique, de munir E d'une métrique et d'une connexion pour se ramener au cas précédent et munir $\Gamma_M(E)$ d'une structure d'espace de Fréchet. En effet, la symétrie graduée se traduit par une antisymétrie sur les vecteurs impairs. En se ramenant à des fibrés sur $\overline{M}$, on peut par contre appliquer les résultats classiques.

L'on termine ce chapitre par une autre description des supervariétés qui se révèlera très utile pour déterminer la partie impaire de nos espace de superlacets.

1.2.7. Le foncteur de points. —

Pour les notions sur les catégories, les foncteurs et les transformations naturelles, on renvoie à [**ML98**]. En super-géométrie la notion de point (comme la notion de valeur) diffère de celle de la géométrie classique. En effet, puisque $Spec(\mathcal{O}_M) = Spec(\mathcal{O}_{\overline{M}})$, un point d'une supervariété M est simplement un point de la variété sous-jacente et ne capture pas la dimension impaire de la super-variété. On regarde alors des familles de points que l'on appelle S-points.

Un S-point est la donnée d'une supervariété S et d'un morphisme $p : S \to M$ déterminé par son morphisme d'algèbre $p^* : C^\infty(M) \to C^\infty(S)$.

En regardant des S-points de la forme $\mathbb{R}^{0|n}$, on va ainsi pouvoir accéder aux dimensions impaires du point.

Concrètement, soit p un S-point avec $\overline{p}$ le morphisme de variété sous-jacent. On note I^+ et I^- les espaces des multi-indices de longueur respectivement paire et impaire, et on se place dans des ouverts de cartes sur M et S munis respectivement des systèmes de coordonnées (x^i, ξ^α) et (s^j, η^β) tels que :

$$p^*(x^i) = x^i \circ \overline{p} + \sum_{I \in I^+} p_I \eta^I$$
$$p^*(\xi^\alpha) = \sum_{I \in I^-} p_I \eta^I$$

Comme pour les points, on peut ainsi évaluer la valeur d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ au S-point p que l'on notera $f(p)$. Il s'agit simplement de la fonction $p^*(f)$. L'évaluation d'une fonction ne donne plus un nombre mais une fonction sur S.

A partir de ces notions, on peut alors voir une supervariété comme un foncteur contravariant de la catégorie des super-variétés **SM** dans la catégorie des ensembles **Set**. En effet, pour toute supervariété S, on peut définir l'ensemble $M(S)$ de ses S-points. Si T est une autre supervariété et $f : T \to S$ un morphisme de supervariété, alors on définit l'application $f_M : M(S) \to M(T)$ par : si $p \in M(S)$, $f_M(p) = p \circ f$. On a bien :

Si $T = S$ et $f = id$, $id_M = id_{M(S)}$.

Si U est une troisième super-variété et si $g : U \to T$, alors $(f \circ g)_M(p) = p \circ f \circ g = f_M(p) \circ g = (g_M \circ f_M)(p)$.

On notera $\mathbf{SM}^{op}$ la catégorie opposée ou catégorie duale des supervariétés, formée des mêmes objets mais dont le sens de toutes les flèches a été inversé. La composition de 2 morphismes f^{op} et g^{op} de cette catégorie s'écrit alors $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

Définition 33. — *Soit M une supervariété. On appelle foncteur de points de M le foncteur $\underline{M}$:*

$$\begin{array}{cccc} \underline{M} & : & \boldsymbol{SM}^{op} & \mapsto & \boldsymbol{Set} \\ & & S & \to & M(S) \end{array}$$

Proposition 1.42. — *Si $f : M \to N$ est un morphisme de supervariétés, alors f définit une transformation naturelle $\underline{f}$ entre les foncteurs $\underline{M}$ et $\underline{N}$.*

Outre les fonctions, les objets géométriques habituels peuvent aussi être évalués en des S-points. Pour tout fibré E au dessus de M, le S-point p définit une application p_E entre les sections de E et celles du tiré en arrière p^*E au dessus de S.

$$p_E : \Gamma_M E \to \Gamma_S p^* E$$

Evaluer une section s de E au S-point p revient simplement à prendre $p_E(s)$.

On peut ainsi évaluer en un S-point un champ de vecteurs $X \in TM$ ou une forme $\omega \in \Omega^*(M)$. On remarque que l'on a bien le diagramme commutatif suivant au niveau de la dualité entre les champs de vecteurs et les formes $\Omega^1(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_M}(TM, \mathcal{O}_M)$:

$$\begin{tikzcd}
TM \times \Omega^1(M) \arrow[r, "p_{TM} \times p_{\Omega^1(M)}"] \arrow[d] & p^*TM \times p^*\Omega^1(M) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_M \arrow[r, "p^*"'] & \mathcal{O}_S
\end{tikzcd}$$

Il suffit de le vérifier localement dans un système de coordonnées.

Pour des résultats plus détaillés sur l'aspect foncteur de points, on pourra se reporter à [**Dum08**] et [**DEF$^+$99**].

CHAPITRE 2

L'ESPACE DES SUPERLACETS

Comme annoncé, ce chapitre est conceptuellement le noyau dur de cette thèse : c'est dans celui-ci que l'on définit l'espace de superlacets que l'on choisit. A partir de quelques exemples de superlacets, on illustre notre choix de se restreindre aux $\mathbb{S}^{1|1}$-superlacets. En effet, d'après les résultats de [**Hél08**], on obtient une identification des superlacets avec des champs de vecteurs sur un voisinage du graphe du lacet sous-jacent. Cette identification n'est pas canonique mais dépend seulement des jets d'ordre fini de ces champs de vecteurs le long du lacet sous-jacent, excepté dans le cas du supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$ où l'interprétation est purement géométrique.

Ensuite, par une construction similaire au cas classique et à l'aide des résultats sur les fibrés construits à partir de superfibrés, l'on munit notre espace de superlacets d'une structure de variété de Fréchet. Guidé par la nature super de l'espace tangent, l'on introduit une structure super naturelle sur l'espace des superlacets à l'aide de faisceaux de superalgèbres.

Puis, afin de pouvoir effectuer les calculs, on introduit la définition de l'espace des superlacets en terme de foncteur de points. Les variables impaires apparaissent alors de manière naturelle.

Enfin, de manière à généraliser proprement les fonctionnelles de Mokhov, on interprète en terme de jets le formalisme en coordonnées qu'il introduit. Ce formalisme est compatible avec la description en terme de foncteur de points de l'espace des superlacets et permet donc d'adapter au cas $\mathbb{S}^{1|1}$, mais aussi $\mathbb{S}^{1|n}$ les notions de fonctionnelles locales, de champs de vecteurs et de formes différentielles sur l'espace des superlacets en coordonnées locales.

2.1. Définition et exemples

Dans cette partie et dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations, nous adoptons la convention suivante. Si E est un superfibré au-dessus d'une supervariété M avec $\iota_M : \overline{M} \to M$ l'injection canonique, on note $\overline{\gamma}^*E$ le fibré $\overline{\gamma}^*(\iota^*E) = \overline{\gamma}^*\overline{E} = \overline{\gamma^*E}$ au-dessus de $\mathbb{S}^1$ et ce afin de bien spécifier que le fibré $\overline{\gamma^*E}$ ne dépend en fait que de la partie $\overline{\gamma}$ du morphisme γ.

2.1.1. Définition et notations. —

Définition 34. — *Soit $\mathbb{S}^{1|n}$ un supercercle et M une supervariété. Un superlacet γ est un morphisme de supervariétés*

$$\gamma \ : \ \mathbb{S}^{1|n} \ \rightarrow \ M$$

Afin de préciser la dimension du supercercle qui intervient, on les appelle les $\mathbb{S}^{1|n}$-superlacets.

On notera $SL^{1|n}M$ l'espace des $\mathbb{S}^{1|n}$-superlacets et simplement SLM l'espace des $S^{1|1}$-superlacets.

Par définition, un $\mathbb{S}^{1|n}$-superlacet γ est équivalent à un morphisme de faisceaux de superalgèbres noté γ^*

$$\gamma^* \ : \ \mathcal{O}_M \ \rightarrow \ \mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}}$$

Et puisque les faisceaux sont fins, γ^* est complètement défini par le morphisme d'algèbres :

$$\gamma^* \ : \ C^\infty(M) \ \rightarrow \ C^\infty(\mathbb{S}^{1|n})$$

On note $\overline{\gamma}$ le lacet sous-jacent.

$$\overline{\gamma} \ : \ S^1 \ \rightarrow \ \overline{M}$$

Nous allons maintenant regarder quelques cas particuliers de superlacets.

2.1.2. $S^{1|0}$-superlacets ou les lacets dans une supervariété. —

Soit $\gamma^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1)$ un morphisme d'algèbre. Puisque $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ ne contient pas d'éléments nilpotents on a donc :

$$\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = \overline{f} \circ \overline{\gamma}$$

et en particulier : $\forall \xi^i, l^*(\xi^i) = 0$

Autrement dit l'espace des lacets dans une supervariété est en bijection avec l'espace des lacets $L\overline{M}$ dans la variété sous-jacente.

2.1.3. Superlacets dans une variété. —

Soit M une variété, donc une supervariété de dimension impaire nulle, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma^* : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^{1|n})$ un morphisme d'algèbre.

Pour simplifier, on suppose que le supercercle $\mathbb{S}^{1|n}$ est trivial càd muni d'un faisceau trivial où l'on peut choisir les applications de recollement égales à l'identité.

On note I_k l'ensemble des multi-indices ordonnés de $[1, n]$ de taille k càd si $(i_1, \cdots, i_k) \in I_k$, alors $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $I_{\leq k}$ l'ensemble des multi-indices de $[1, n]$ de taille inférieure à k , I^+ et I^- ceux de longueur respectivement paire et impaire et I^{+*} ceux de longueur paire strictement positive.

On peut écrire :

$$\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f \circ \overline{\gamma} + \sum_{I \in I^{+*}_{\leq n}} \lambda_I(f) \theta^I$$

avec $\lambda_I(f) \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ par trivialité du super-cercle.

On cherche à déterminer la nature des λ_I. La seule condition est celle de morphisme d'algèbre, càd :

$$\forall f,g \in C^\infty(M), \gamma^*(fg) = \gamma^*(f)\gamma^*(g)$$

Regardons en petites dimensions.

Si $n=1$, on a $\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f \circ \overline{\gamma}$, il n'y a pas de λ_I et donc un superlacet est simplement défini par un lacet dans la variété sous-jacente.

Si $n=2$, on a $\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f \circ \overline{\gamma} + \lambda_{12}(f)\theta^1\theta^2$ et ainsi la condition se traduit par :

$$\forall f,g \in C^\infty(M), \lambda_{12}(fg) = \lambda_{12}(f) g \circ \overline{\gamma} + f \circ \overline{\gamma}\lambda_{12}(f)$$

Ainsi λ_{12} est un champ de vecteur le long de $\overline{\gamma}$.

Par trivialité du supercercle, on peut considérer $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^{1|2} \to M$ et on peut alors interpréter un superlacet comme un lacet $\overline{\gamma}$ et une section du tiré en arrière du fibré tangent par $\overline{\gamma}$, $\lambda \in \Gamma_{\mathbb{S}^{1|2}}(\overline{\gamma}^*TM)$.

Si $n=3$, on a $\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f \circ \overline{\gamma} + \lambda_{12}(f)\theta^1\theta^2 + \lambda_{13}(f)\theta^1\theta^3 + \lambda_{23}(f)\theta^2\theta^3$.

Comme dans le cas $n=2$, les λ_{ij} sont simplement des champs de vecteur le long de $\overline{\gamma}$.

Par trivialité du supercercle, on peut alors interpréter un superlacet comme un lacet $\overline{\gamma}$ et une section du tiré en arrière du fibré tangent par $\overline{\gamma}$, $\lambda \in \Gamma_{\mathbb{S}^{1|3}}(\overline{\gamma}^*TM)$.

Le cas $n=4$ lui n'est pas si simple. Si l'on écrit γ^* sous la forme :

$$\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f \circ \overline{\gamma} + \sum_{1 \le i < j \le 4} \lambda_{ij}(f)\theta^i\theta^j + \lambda_{1234}(f)\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4$$

la condition de morphisme donne les relations suivantes :

$$\forall i<j, \forall f,g \in C^\infty(M), \lambda_{ij}(f\ g) = \lambda_{ij}(f)\ g \circ \overline{\gamma} + f \circ \overline{\gamma}\ \lambda_{ij}(g)$$

et

$$\begin{aligned}
&\forall f,g \in C^\infty(M),\\
&\lambda_{1234}(fg) = \lambda_{1234}(f)\ g\circ\overline{\gamma} + f\circ\overline{\gamma}\ \lambda_{1234}(g) + \lambda_{12}(f)\lambda_{34}(g) - \lambda_{13}(f)\lambda_{24}(g)\\
&\qquad + \lambda_{14}(f)\lambda_{23}(g) + \lambda_{23}(f)\lambda_{14}(g) - \lambda_{24}(f)\lambda_{13}(g) + \lambda_{34}(f)\lambda_{12}(g)
\end{aligned}$$

qui est à priori difficilement interprétable...

L'on va alors suivre les résultats de Hélein, voir [**Hél08**]. Les λ_{ij} sont bien des champs de vecteurs le long de $\overline{\gamma}$.

Soit $\pi : \mathbb{S}^1 \times M \to M$ la projection sur le deuxième facteur. Chaque λ_{ij} est une section du fibré π^*TM au dessus du graphe $\Gamma = \{(x, \overline{\gamma}(x)) | x \in \mathbb{S}^1\}$ de $\overline{\gamma}$. On peut ainsi étendre chaque λ_{ij} en une section de π^*TM au dessus d'un voisinage de Γ dans $\mathbb{S}^1 \times M \to M$ que l'on notera χ_{ij}. Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, chaque χ_{ij} définit un champs de vecteurs de M sur un voisinage de $\overline{\gamma}(x)$ que l'on notera $(\chi_{ij})_x$.

On a que $\forall f \in C^\infty(M),\ \chi_{ij}(f) \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times M)$.
Soit l'application $1 \times \overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times M$.

$$(1 \times \overline{\gamma})^*(\chi_{ij}(f)) = \lambda_{ij}(f)$$

On peut maintenant donner un sens à $\lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f)) = (1 \times \overline{\gamma})^*(\chi_{ij}(\chi_{kl}(f)))$ et on écrit alors γ^* sous la forme :

$$\forall f \in C^\infty(M), \gamma^*(f) = f\circ\overline{\gamma} + \sum_{1\leq i<j\leq 4} \lambda_{ij}(f)\theta^i\theta^j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f))\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \lambda_{1234}(f)\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4$$

Maintenant, soit $f, g \in C^\infty(M)$, on a :
$\gamma^*(f)\gamma^*(g) = (f\ g)\circ\overline{\gamma} + \sum_{1\leq i<j\leq 4}(\lambda_{ij}(f)(g\circ\overline{\gamma}) + (f\circ\overline{\gamma})\lambda_{ij}(f))\theta^i\theta^j + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f))(g\circ\overline{\gamma})\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i<j\\k<l}}(f\circ\overline{\gamma})\lambda_{ij}(\lambda_{kl}(g))\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(f)\lambda_{kl}(g)\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \lambda_{1234}(f)(g\circ\overline{\gamma})\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 + (f\circ\overline{\gamma})\lambda_{1234}(g)\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4$

On en déduit comme précédemment que :
$\forall i < j, \forall f, g \in C^\infty(M), \lambda_{ij}(f\ g) = \lambda_{ij}(f)\ (g\circ\overline{\gamma}) + (f\circ\overline{\gamma})\ \lambda_{ij}(g)$

ce qui permet d'écrire :

$\sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f\ g))\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = \sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f)))\ (g\circ\overline{\gamma})\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{kl}(f)\lambda_{ij}(g)\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(f)\lambda_{kl}(g)\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \sum_{\substack{i<j\\k<l}}(f\circ\overline{\gamma})\ \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(g))\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l = \sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(f)))\ (g\circ\overline{\gamma})\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + 2\sum_{\substack{i<j\\k<l}} \lambda_{ij}(f)\lambda_{kl}(g)\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l + \sum_{\substack{i<j\\k<l}}(f\circ\overline{\gamma})\ \lambda_{ij}(\lambda_{kl}(g))\theta^i\theta^j\theta^k\theta^l$

Et ainsi,

$$\forall f, g \in C^\infty(M), \lambda_{1234}(fg) = \lambda_{1234}(f)\ (g\circ\overline{\gamma}) + (f\circ\overline{\gamma})\ \lambda_{1234}(f)$$

De la même manière, on peut aussi étendre λ_{1234} à un champs de vecteur χ_{1234} sur un voisinage du graphe de γ.

Le morphisme γ^* est donc donné par les champs de vecteur χ_{ij} et χ_{1234}. Or on peut aussi écrire :

$\gamma^* = \overline{\gamma}^* + \sum_{i<j} \lambda_{ij}\theta^i\theta^j + \lambda_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 + \frac{1}{2}(\sum_{i<j} \lambda_{ij}\theta^i\theta^j + \lambda_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4)^2$

D'après [**Hél08**], **Proposition 1.1**, on peut choisir les χ_{ij}, de manière non canonique tels que :

$$\forall i < j, k < l, \quad [(\chi_{ij})_x, (\chi_{kl})_x] = 0$$

On a ainsi que : $e^{\sum_{i<j} \chi_{ij}\theta^i\theta^j + \chi_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4} = 1 + \sum_{i<j} \chi_{ij}\theta^i\theta^j + \chi_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4 + \frac{1}{2}(\sum_{i<j} \chi_{ij}\theta^i\theta^j + \chi_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4)^2$

Et au final :

$$\gamma^* = (1 \times \overline{\gamma})^*(e^{\sum_{i<j}\chi_{ij}\theta^i\theta^j + \chi_{1234}\theta^1\theta^2\theta^3\theta^4})$$

Les $\mathbb{S}^{1|4}$-superlacets sont donc donnés non plus par des champs de vecteurs le long d'un lacet $\overline{\gamma}$ mais par des champs de vecteurs sur un voisinage du graphe du lacet sous-jacent. Le problème de cette identification est qu'elle n'est pas canonique : elle dépend du jet d'ordre 1 des champs de vecteurs λ_{ij} le long du lacet sous-jacent. Cette identification se prête donc à priori moins à l'etude géométrique de l'espace de nos superlacets. Ceci explique que dans la suite, l'on se restreigne aux $\mathbb{S}^{1|1}$ superlacets.

En effet, ce résultat se généralise et on a :

***Théorème 2.1* (Hélein).** — *Soit M une variété différentiable et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^{1|n}$ le supercercle trivial muni des variables impaires $\theta^1, \cdots, \theta^n$ et $\pi : \mathbb{S}^1 \times M \to M$ la projection sur le deuxième facteur.*

Si $\gamma : \mathbb{S}^{1|n} \to M$ est un superlacet, alors il existe une collection de champs de vecteur χ_I avec $I \in I^{+*}_{\leq n}$ de π^*TM sur un voisinage du graphe de $\overline{\gamma}$ dans $\mathbb{S}^1 \times M$ telle que si l'on pose $\Xi := \sum_{I \in I^{+*}_{\leq n}} \chi_I \theta^I$, alors :

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad \gamma^*(f) = (1 \times \overline{\gamma})^*(e^{\Xi}(f))$$

Pour les deux paragraphes suivant, on utilisera les notations suivantes.

Soit $M^{p|q}$ une supervariété de dimension $p|q$. On notera x^i pour $x^1, \cdots, x^p$ un système de coordonnées locales paires que l'on identifiera à des coordonnées locales sur $\overline{M}$ et ξ^α pour $\xi^1, \cdot, \xi^q$ un système de coordonnées locales impaires de M et $x, \theta^1, \cdots, \theta^n$ un système de coordonnées sur $\mathbb{S}^{1|n}$.

2.1.4. $\mathbb{S}^{1|1}$-superlacets dans une supervariété. —

C'est le cas qui nous intéressera le plus. Il sera détaillé dans la prochaine section. Nous omettrons donc ici les détails.

Soit $\gamma^* : C^\infty(M) \to C^\infty(\mathbb{S}^{1|1})$. Puisque $C^\infty(\mathbb{S}^{1|1})$ ne contient pas d'éléments nilpotents pairs on a localement :

$$\gamma^*(x^i) = x^i \circ \overline{\gamma}$$

$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \lambda^\alpha \theta^1$$

où les λ^α sont n fonctions sur $\mathbb{S}^1$ si le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$ est trivial.

Si l'on effectue un changement de variable sur M avec les nouvelles variables impaires $\eta^\beta = \eta^\beta_{I-}\xi^{I-}$.

On a alors $l^*(\eta^\beta) = \lambda'^\beta\theta^1 = l^*(\eta^\beta_\alpha)\lambda^\alpha\theta^1 = \overline{\gamma}^*(\dfrac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha})\lambda^\alpha\theta^1$.

Ceci nous permettra d'identifier l'espace des $\mathbb{S}^{1|1}$-superlacets comme le fibré au-dessus de la variété de Fréchet $L\overline{M}$ des lacets dans la variété sous-jacente, où les fibres s'identifient à l'espace $(\Gamma_{\mathbb{S}^{1|1}}\pi^*_{\mathbb{S}^{1|1}}((\overline{\gamma})^*TM)_1)_0$ des sections paires du tiré en arrière par $\pi_{\mathbb{S}^{1|1}}$ de la partie impaire du tiré en arrière par $\overline{\gamma}$ du fibré tangent de M , où $\pi_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est la projection canonique de $\mathbb{S}^{1|1}$ sur $\mathbb{S}^1$ (cf §2.2.1).

2.1.5. $\mathbb{S}^{1|2}$-superlacets dans une supervariété. —

Soit $\gamma^* : C^\infty(M) \to C^\infty(\mathbb{S}^{1|2})$.

$$\gamma^*(x^i) = x^i \circ \overline{\gamma} + \lambda^i \theta^i \theta^2$$

$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \lambda_1^\alpha \theta^1 + \lambda_2^\alpha \theta^2$$

Comme précédemment, on cherche à interpréter les quantités λ^i, λ_1^α et λ_2^α. Pour simplifier, on suppose le supercercle trivial et ainsi λ^i, λ_1^α et λ_2^α sont des fonctions sur $\mathbb{S}^1$.

Si l'on regarde comment ces fonctions se transforment dans un changement de variables de la forme $(y^j = y_0^j + \sum_{I^+} y_{I^+*}^j \xi^{I^+}, \eta^\beta = \sum_{I^-} \eta_{I^-}^\beta \xi^{I^-})$, on a :

$$\gamma^*(y^j) = y_0^j \circ \overline{\gamma} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \lambda^i \theta^i \theta^2 + \sum_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta}^j (\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta \lambda_2^\alpha) \theta^1 \theta^2$$

$$\gamma^*(\eta^\beta) = \eta_\alpha^\beta (\lambda_1^\alpha \theta^1 + \lambda_2^\alpha \theta^2) = \gamma^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha})(\lambda_1^\alpha \theta^1 + \lambda_2^\alpha \theta^2)$$

On voit que les λ^i se tranforment alors selon :

$$\lambda'^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \lambda^i + \sum_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta}^j (\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta \lambda_2^\alpha)$$

qui serait interprétable comme les changements de coordonnées d'un vecteur sans le terme $\sum_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta}^j (\lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta - \lambda_1^\beta \lambda_2^\alpha)$.

Comme pour les lacets dans une variété, il faut alors définir les $\mathbb{S}^{1|2}$-superlacets au moyen de champs de vecteurs sur un voisinage du graphe de $\overline{\gamma}$.

2.2. Les $\mathbb{S}^{1|1}$-superlacets

2.2.1. $\mathbb{S}^{1|1}$ deux supercercles pas comme les autres. —

En un sens, le supercercle $\mathbb{S}^{1|1}$ est privilégié par rapport aux autres supercercles. En effet, en général on a toujours une injection canonique $\iota_{\mathbb{S}^{1|n}}$ de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^{1|n}$ obtenue par la projection canonique des superfonctions. Par contre, en général l'on n'a pas de projection canonique de $\mathbb{S}^{1|n}$ sur $\mathbb{S}^1$ ce qui reviendrait à une injection de l'algèbre $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ dans $C^\infty(\mathbb{S}^{1|n})$.

En effet, celle-ci consisterait à envoyer naturellement une fonction f de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ sur $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{1|n})$ mais si $n \geq 2$ cette injection n'est pas un morphisme de supervariété car dans un changement de carte $x \to x + \theta_1\theta_2$ la fonction f est envoyée sur $f + \partial_x f \theta_1 \theta_2$. Dans le cas $\mathbb{S}^{1|1}$ ce genre de phénomènes ne peut se produire car toute fonction paire ne possède aucun élément nilpotent. On aura donc bien une projection $\pi_{\mathbb{S}^{1|1}} : \mathbb{S}^{1|1} \to \mathbb{S}^1$ telle que $\pi_{\mathbb{S}^{1|1}} \circ \iota_{\mathbb{S}^{1|1}} = Id_{\mathbb{S}^1}$.

Ainsi pour tout morphisme $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M^{p|q}$ de supervariété de morphisme sous-jacent $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \overline{M}$ on pourra aussi considérer $\overline{\gamma}$ comme un morphisme $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^{1|1} \to \overline{M}$.

Dans l'esprit du théorème de Batchelor cela se traduit par une identification canonique (à isomorphisme près) du supercercle par un fibré en droite $\mathcal{L}$ impair au dessus de $\mathbb{S}^{1|1}$. Si le supercercle est trivial, $\mathcal{L} = T\mathbb{S}^1[1]$, sinon il s'agit du fibré de Moëbius shifté (càd avec parité décalée). Le faisceau des fonctions impaires s'identifie alors au faisceau des sections de $\mathcal{L}$.

D'autre part, l'injection de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ dans $C^\infty(\mathbb{S}^{1|1})$ va permettre de définir pour tout super-fibré E au-dessus de $\mathbb{S}^{1|1}$ les fibrés itérés $\widetilde{E^k}$ ainsi que les superfibrés E_0 et E_1.

Avant de continuer, regardons plus en détails les applications de recollement des superfibrés au dessus de $\mathbb{S}^{1|1}$. Ceci va nous permettre de définir deux sous-fibrés de $\widetilde{E^1}$ que l'on utilise dans la suite.

Soit E un superfibré au dessus d'une supervariété M et (e_k, e_α) et (e'_j, e'_β) deux bases locales et Ψ l'application de recollement.

On regarde dans un premier temps le tiré en arrière γ^*E par un superlacet $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M$. On notera encore e_k, e_α et e'_j, e'_β deux bases locales qui correspondent au tiré en arrière des précédentes avec pour changement de carte $\gamma^*(\Psi)$. Soit $s = s^k e_k + s^\alpha e_\alpha$ une section de γ^*E.

$$s'^j = \gamma^*(\Psi^j_k)s^k + \gamma^*(\Psi^j_\alpha)s^\alpha$$

$$s'^\beta = \gamma^*(\Psi^\beta_k)s^k + \gamma^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha$$

Maintenant, chaque composante s^k ou s^α se décompose localement comme $s^k = s^k_0 + \theta s^k_1$ ainsi que les entrées de la matrice Ψ.

Les $e_k, \theta e^\alpha, \theta e_k, e_\alpha$ et $e'_j, \theta e'^\beta, \theta e'^j, e'_\beta$ sont alors deux bases locales de $\widetilde{\gamma^* E}$. Par analogie, on notera les coordonnées des section $s^k_0, s^\alpha_1, s^k_1, s^\alpha_0$ et les formules des changements de bases sont alors :

$$s'^j_0 = \gamma^*(\Psi^j_k)s^k_0 = \overline{\gamma}^*(\Psi^j_k)s^k_0$$

$$s'^\beta_1 = \gamma^*(\Psi^\beta_k)_1 s^k_0 + \gamma^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_1 = \gamma^*(\Psi^\beta_k)_1 s^k_0 + \overline{\gamma}^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_1$$

$$s'^j_1 = \gamma^*(\Psi^j_k)s^k_1 + \gamma^*(\Psi^j_\alpha)_1 s^\alpha_0 = \overline{\gamma}^*(\Psi^j_k)s^k_1 + \gamma^*(\Psi^j_\alpha)_1 s^\alpha_0$$

$$s'^\beta_0 = \gamma^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_0 = \overline{\gamma}^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_0$$

Ceci permet de déduire 2-sous-fibrés, l'un impair, l'autre pair, que l'on note $(\gamma^*E)_{01}$ et $(\gamma^*E)_{11}$ qui sont respectivement localement $Vect(\theta e_k)$ et $Vect(\theta e_\alpha)$.

Leurs sections se transforment comme :

$$s'^j_1 = \gamma^*(\Psi^j_k)s^k_1 = \overline{\gamma}^*(\Psi^j_k)s^k_1 \tag{2.2.1}$$

$$s'^\beta_1 = \gamma^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_1 = \overline{\gamma}^*(\Psi^\beta_\alpha)s^\alpha_1 \tag{2.2.2}$$

Proposition 2.2. —
$$(\gamma^*E)_{01} = \overline{\gamma}^*(\overline{E})_0 \otimes \mathcal{L}$$

$$(\gamma^*E)_{11} = \overline{\gamma}^*(\overline{E})_1 \otimes \mathcal{L}$$

Démonstration. — Il suffit de comparer les lois de transformations de changements de cartes en prenant en compte les précédentes et celles de $\mathbb{S}^{1|1}$.

□

Corollaire 2.3. — (i)
$$\Pi(\gamma^*\Pi E)_{01} = (\gamma^*E)_{11}$$
(ii) *Si* $\mathbb{S}^{1|1}$ *est le super-cercle trivial,*
$$(\gamma^*E)_{01} \approx \overline{\gamma}^*(\Pi\overline{E})_1$$
$$(\gamma^*E)_{11} \approx \overline{\gamma}^*(\Pi\overline{E})_0$$

Démonstration. —
(i) $\Pi(\gamma^*\Pi E)_{01} = \Pi(\overline{\gamma}^*(\overline{\Pi E})_0 \otimes \mathcal{L}) = \Pi(\Pi(\overline{\gamma}^*(\overline{E})_1) \otimes \mathcal{L}) = (\overline{E})_1 \otimes \mathcal{L}$
(ii) Si le supercercle est trivial, $(\gamma^*E)_{01} = \overline{\gamma}^*(\overline{E})_0 \otimes \mathcal{L} = \Pi(\overline{\gamma}^*(\overline{E})_0) = \overline{\gamma}^*(\Pi\overline{E})_1$.

□

Enfin, il est important de noter que ces fibrés sont parfaitement définis par la seule donnée de $\overline{\gamma}$ comme on peut le constater directement au niveau des changements de carte ou par la proposition précédente.

On pourra aussi remarquer au fil des résultats que ceux-ci sont aussi valables dans le cas $\mathbb{S}^{1|n}$ à condition de choisir une injection (non canonique) de $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ dans $C^\infty(\mathbb{S}^{1|n})$.

2.2.2. Les $\mathbb{S}^{1|1}$ superlacets : version géométrique. —

Maintenant, un super lacet $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M^{p|q}$ est donné par un morphisme de super-algèbres $\gamma^* : C^\infty(M^{p|q}) \to C^\infty(\mathbb{S}^{1|1})$. Il est donc parfaitement défini par ses images des systèmes de coordonnnées locales (x^i, ξ^α).

$$\gamma^*(x^i) = x^i \circ \overline{\gamma}$$
$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \theta\lambda^\alpha(x)$$

On peut remarquer que dans le cas du supercercle trivial, le super-lacet est parfaitement défini par les $p+q$ fonctions sur $\mathbb{S}^1$: $\gamma^*(x^i)$ et $\lambda^\alpha(x)$ que l'on peut interpréter comme une famille infinie de coordonnées paramétrée par $\mathbb{S}^1$.

Dans le cas de l'autre super-cercle les fonctions λ^α ne sont pas forcément des fonctions C^∞ définies sur $\mathbb{S}^1$ mais seulement sur chaque ouvert de carte. En fixant une trivialisation du supercercle, on pourra identifier toute section $\gamma^*(\xi^\alpha) = \theta\lambda^\alpha(x)$ par une fonction $\lambda^\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ (\lambda^\alpha)^{(k)}(0) = -(\lambda^\alpha)^{(k)}(1)$.

Avant de continuer, il est important de se demander quelle quantitée de $\theta\lambda^\alpha$ ou de λ^α va nous intéresser. Si l'on raisonne en se référant au cas super en dimension finie, on peut préférer la variable λ^α. En effet, nos espaces de lacets sont des espaces pairs, ils sont formés de points bien définis. Il semble donc naturel que les "coordonnées" ainsi que le "sytème de coordonnées" soient pairs. Dans le cas du supercercle trivial, θ et λ^α sont facilement séparables. Dans le cas de l'autre supercercle, les deux quantités sont plus difficilement séparables.

Tout réside en fait dans l'interprétation de la variable θ.

Dans notre version "géométrique", la variable θ va disparaitre pour se transformer en structure géométrique, càd que nos quantités vont s'exprimer comme des fonctions de $\mathbb{S}^1$ et la nature géométrique des objets en jeu sera modifiée en y intégrant θ. Dans le cas du supercercle trivial, cela se traduit simplement par un décalage (ou shift) de parité et dans l'autre, cela se traduit en plus par de la torsion (ou twist). Ce point de vue n'est possible de manière canonique que grâce à l'identificatin canonique de $\mathbb{S}^{1|1}$ avec le fibré $\mathcal{L}$. De plus la volonté "d'oublier" la variable θ est fortement motivée par le fait que $\gamma^*(x^i)$ ne dépend pas de θ : la donne sera toute différente dans le cas du foncteur des points et l'on adoptera un autre point de vue.

Comme dans [**Mok98b**], c'est le type de covariance qui va nous permettre de déterminer la nature géométrique des superobjets. Ainsi, dans un changement de variables sur $M^{p|q}$ dans les coordonnées ($y^j = y^j_0 + \sum_{I^+} y^j_{I^+}\xi^{I^+}, \eta^\beta = \sum_{I^-} y^\beta_{I^-}\xi^{I^-}$), les quantités précédentes se transforment de la manière suivante :

$$\gamma^*(y^i) = y^i_0 \circ \overline{\gamma}$$
$$\gamma^*(\eta^\beta) = \gamma^*(y^\beta_\alpha)\gamma^*(\xi^\alpha) = \gamma^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha})\gamma^*(\xi^\alpha) = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha})\gamma^*(\xi^\alpha)$$

D'après 1.41, ceci permet d'interpréter un superlacet comme un couple formé d'un lacet $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \overline{M}$ et d'une section **paire** du tiré en arrière $\pi^*_{\mathbb{S}^{1|1}}(\overline{\gamma}^*TM)_1 = (\gamma^*TM)_1$.

Remarque. — *Dans le cas où le fibré $(TM)_1$ est bien défini et où les changements de cartes s'identifient aux matrices y^β_α, l'égalité $\gamma^*(\eta^\beta) = \gamma^*(y^\beta_\alpha)\gamma^*(\xi^\alpha)$ permet d'identifier les $\gamma^*(\xi^\alpha)$ comme les coordonnées d'une section du tiré en arrière $\gamma^*(TM)_1$ mais il semble redondant de définir γ^* à partir d'un fibré construit justement grâce à γ^*.*

Maintenant, comme on l'a dit, on cherche plutôt à interpréter les résultats suivants :

$$\gamma^*(y^i) = y^i_0 \circ \overline{\gamma}$$

$$\lambda'^\beta = \gamma^*(\frac{\partial y^\beta}{\partial \xi^\alpha})\lambda^\alpha = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^\beta}{\partial \xi^\alpha})\lambda^\alpha$$

en gardant en mémoire qu'il y a un θ devant les λ^α dont il faut tenir compte ce qui correspond à considérer le fibré $(\widetilde{\gamma^*TM})_1$ plutôt que le superfibré $(\gamma^*TM)_1$.

On en déduit, d'après 2.2.2 :

Proposition 2.4. — *Un superlacet $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M$ est donné par un couple $(\overline{\gamma}, \lambda)$ avec*

$$\overline{\gamma} \in L\overline{M}$$

$$\lambda \in \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\gamma^* TM)_{11}$$

En utilisant le corollaire 2.3, un superlacet devient un lacet dans $\overline{M}$ et une section de $\Gamma_{\mathbb{S}^1}((\Pi\overline{TM})_0)$, on a ainsi :

Corollaire 2.5. — *Si $\mathbb{S}^{1|1}$ est le supercercle trivial, $\gamma \in SLM$ est équivalent à un lacet :*

$$\gamma : \mathbb{S}^1 \to (\Pi\overline{TM})_0$$

Les résultats de Mokhov se généralisent alors trivialement faisant intervenir désormais des structures géométriques sur $(\Pi\overline{TM})_0$ au lieu de M.

Remarque. — *Dans le cas du supercercle non trivial, on peut aussi voir les superlacets comme des chemins dans $(\Pi\overline{TM})_0$. On identifie le supercercle à $[0,1]/0 \sim 1$, les sections impaires sont identifiées à des fonctions f sur $[0,1]$ telles $f(0) = -f(1)$. On peut donc identifier les superlacets à certains lacets dans $\overline{M}$ qui se relèvent dans $(\overline{\Pi TM})_0$ en un chemin de vecteurs $X(t)$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X)^{(k)}(0) = -(X)^{(k)}(1)$.*

2.2.3. Espace tangent. —

Bien que pour l'instant, notre espace de morphismes ne soit pas muni d'une structure de variété différentiable, l'on peut essayer de déterminer son espace tangent puisque la notion de chemins différentiables est elle, bien définie.

Prenons alors un chemin de superlacets γ_t paramétré pour l'instant par un paramètre pair t, ce qui semble raisonnable puisque notre espace est un espace de morphismes, donc pair.

Les coordonnées X^i et X^α du vecteur tangent X sont alors données par :

$$\frac{d\gamma_t^*(x^i)}{dt} = X^i$$
$$\frac{d\gamma^*(\xi^\alpha)}{dt} = \theta X^\alpha$$

Afin de déterminer la nature géométrique de ces fonctions, on étudie leurs transformations dans un changement de coordonnées de la forme $(y^j = y_0^j + \sum_{I^+} y^i_{I^+}\xi^{I^+}, \eta^\beta = \sum_{I^-} \eta^\beta_{I^-}\xi^{I^-})$.

On a alors :

$$X'^j = \frac{d\gamma_t^*(y^j)}{dt} = \frac{d(y_0^j(x_t^{i*}))}{dt} = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})X^i$$
$$\theta X'^\beta = \theta\overline{\gamma}^*(\frac{\partial^2 \eta^\beta}{\partial x^i \partial \xi^\alpha})X^i\lambda^\alpha + \theta\overline{\gamma}^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha})X^\alpha$$

On note $\pi : TM \to M$ la projection canonique. Localement le fibré TM est engendré par le système de coordonnées x^i, ξ^α, dx^i et $d\xi^\alpha$ et l'on a le sous-superfibré $\mathrm{Ker}(d\pi)$ qui correspond au faisceau : $\mathrm{Vect}_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}}}(dx^i, d\xi^\alpha)$. Les coordonnées X^i et X^α s'identifient donc aux coordonnées d'un vecteur de la forme $X^i\partial_{x^i} + X^\alpha\theta\partial_{d\xi^\alpha}$, et ainsi, puisque $\overline{\gamma}^*(\overline{TM}_0) = (\overline{\gamma}^*(TM))_0$:

Proposition 2.6. — *Soit $\gamma \in SLM$.*

$$(T_\gamma(SLM))_0 \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^*(TM))_0 \oplus (\gamma^*(Ker(d\pi)))_{11})$$

Corollaire 2.7. — *Si $\mathbb{S}^1$ est le supercercle trivial, alors*

$$(T_\gamma(SLM))_0 \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^*(T\Pi TM))_0)$$

Cependant, c'est en étudiant les dérivées le long de supercourbes que l'espace de superlacets révèle au niveau infinitésimal, sa partie impaire.

En effet, prenons maintenant une supercourbe de $\mathbb{R}^{1|1}$ dans l'espace des lacets. Cela se traduit par une famille de superlacets toujours paramétrée par t mais aussi par un paramètre impair s. Cela s'écrit :

$$\gamma^*_{s,t}(x^i) = \overline{\gamma}^*_t(x^i) + s\theta\lambda^i_t(x)$$

$$\gamma^*_{s,t}(\xi^\alpha) = s\zeta^\alpha_t(x) + \theta\lambda^\alpha_t(x)$$

En dérivant par rapport à t en $t = s = 0$ on trouve les parties paires des vecteurs, càd les composantes X^i_0 et θX^α_1, et en dérivant par rapport à s en $t = s = 0$ on trouve les parties impaires des vecteurs càd θX^i_1 et X^α_0. On a ainsi :

$$X^i = X^i_0 + \theta X^i_1 = \frac{d\overline{\gamma}^*_t(x^i)}{dt}|_{t=0}(x) + \theta\lambda^i_0(x)$$

$$X^\alpha = \theta X^\alpha_1 + X^\alpha_0 = \theta\frac{d\lambda^\alpha_t}{dt}|_{t=0}(x) + \zeta^\alpha_0(x)$$

Ainsi les coordonnées des vecteurs sont maintenant des fonctions de $\mathbb{S}^{1|1}$.

On regarde alors comment ces coordonnées se transforment dans un changement de variables. Tout d'abord les chemins s'écrivent :

$$\gamma^*_{s,t}(y^j) = y^j(\overline{\gamma}^*_t(x^i)) + s\overline{\gamma}^*_t(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})\theta\lambda^i_t(x) + y^j_{\alpha_1\alpha_2}(\overline{\gamma}^*_t(x^i))s\zeta^{\alpha_1}_t(x)\theta\lambda^{\alpha_2}_t(x)$$
$$\gamma^*_{s,t}(\eta^\beta) = \overline{\gamma}^*_t(\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha})(s\zeta^\alpha_t(x) + \theta\lambda^\alpha_t(x))$$

Et ainsi les coordonnées se transforment suivant :

$$X'^j = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})X^i_0 + \theta\overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})X^i_1 + \overline{\gamma}^*(\frac{\partial^2 y^j}{\partial\xi^{\alpha_1}\partial\xi^{\alpha_2}})X^{\alpha_1}_0\theta\lambda^{\alpha_2}_0$$

$$X'^\beta = \theta\overline{\gamma}^*(\frac{\partial^2\eta^\beta}{\partial x^i\partial\xi^\alpha})X^i_0\lambda^\alpha_0 + \theta\overline{\gamma}^*(\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha})X^\alpha_1 + \overline{\gamma}^*(\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha})X^\alpha_0$$

On peut alors réécrire ces équations de deux manières. Tout d'abord :

$$X'^j = \gamma^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i})X^i + \gamma^*(\frac{\partial y^j}{\partial\xi^\alpha})X^\alpha$$

$$X'^\beta = \gamma^*(\frac{\partial\eta^\beta}{\partial x^i})X^i + \gamma^*(\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\xi^\alpha})X^\alpha$$

Et ainsi :

Proposition 2.8. — *Soit $\gamma \in SLM$.*

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^{1|1}}(\gamma^* TM)$$

Dans l'esprit des supervariétés, les variables impaires ajoutent des vecteurs de base impairs à l'espace tangent. Autrement dit les variables impaires ne sont pas ajoutées aux coordonnées mais aux vecteurs de base. Or dans l'écriture précédente, on ajoute une partie impaire aux coordonnées sans changer les vecteurs de base (que l'on réinterprète néanmoins en terme super).

Après avoir interprété la "partie paire" de l'espace tangent en un lacet comme une section d'un fibré au-dessus de $\mathbb{S}^1$, il semble naturel de chercher à interpréter un vecteur tangent comme une section d'un fibré en super-espace au-dessus de $\mathbb{S}^1$ dont la partie paire est la même que précédemment. Un vecteur tangent s'écrit maintenant : $X = X_0^i \partial_i + X_1^\alpha(\theta\partial_\alpha) + X_1^i(\theta\partial_i) + X_0^\alpha \partial_\alpha$ où les vecteurs de base $\partial_i, \theta\partial_\alpha, \theta\partial_i, \partial_\alpha$ sont à déterminer.

On a alors :

$$X_0'^j = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) X_0^i$$

$$X_1'^\beta = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial^2 \eta^\beta}{\partial x^i \partial \xi^\alpha}) X_0^i \lambda_0^\alpha + \overline{\gamma}^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha}) X_1^\alpha$$

$$X_0'^\beta = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial \eta^\beta}{\partial \xi^\alpha}) X_0^\alpha$$

$$X_1'^j = \overline{\gamma}^*(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) X_1^i + \overline{\gamma}^*(\frac{\partial^2 y^j}{\partial \xi^{\alpha_1} \partial \xi^{\alpha_2}}) X_0^{\alpha_1} \lambda_0^{\alpha_2}$$

Et ainsi, respectivement dans le même ordre,

Proposition 2.9. — *Soit $\gamma \in SLM$.*

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}[(\overline{\gamma}^*(TM))_0 \oplus (\gamma^*(Ker(d\pi)))_{11} \oplus (\overline{\gamma}^*(TM))_1 \oplus (\gamma^*(Ker(d\pi)))_{01}]$$

On pourra remarquer que l'on peut aussi écrire :

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}[\overline{\gamma}^*(TM) \oplus (\gamma^*(\mathrm{Ker}(d\pi)))_{11} \oplus (\gamma^*(\mathrm{Ker}(d\pi)))_{01}]$$

Corollaire 2.10. — *Si $\mathbb{S}^1$ est le supercercle trivial, alors*

$$T_\gamma(SLM) \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^* T\overline{\Pi TM})$$

Le premier espace tangent correspond à l'espace tangent obtenu en considérant un superlacet comme un foncteur de point : c'est d'ailleurs exactement ce que l'on fait, en étudiant le lacet en un $\mathbb{R}^{1|1}$-point. L'autre espace n'est qu'une réécriture au dessus de $\mathbb{S}^1$ de cet espace tangent.

Il est important de noter que, comme annoncé, la variable θ a disparu dans la dernière version et s'est transformée en une structure géométrique. Outre que la solution est moins élégante, l'inconvénient de ce point de vue est que les fonctionnelles ne peuvent alors plus s'écrire comme on l'espérait avec des ∂_θ des variables et une intégration sur

$\mathbb{S}^{1|1}$. C'est pourquoi, si ce point de vue est utile pour expliciter la structure de variété de Fréchet de SLM, on adoptera dans la suite le point de vue foncteur de point.

2.2.4. Structure de Fréchet. —

L'intérêt de se "débarrasser" de la variable θ est de revenir à des objets classiques et de nous permettre d'utiliser les notions classiques de métrique, de connexion, de transport parallèle et d'addition locale afin de pourvoir notre espace de morphismes d'une structure de variété de Fréchet.

Dans le cas classique des espace de lacets, ce sont les espaces des sections de γ^*TM qui jouent le rôle d'espaces de Fréchet modèles. Ils nous permettent de définir non seulement la topologie mais aussi toute la structure différentiable (cf **[Ham82]**, **[Sta05]**).

Dans notre cas, ce seront les espaces de sections de $(\overline{\gamma}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma}^*TM)_{11}$ qui jouent le rôle d'espaces modèles. En effet, ce fibré est totalement pair : on peut donc le munir d'une métrique g et ainsi d'une structure d'espace de Fréchet.

Proposition 2.11. — *Soit M une supervariété et SLM l'espace des superlacets de M. Alors SLM est une variété de Fréchet.*

De plus, $\begin{array}{c} SLM \\ \downarrow \\ L\overline{M} \end{array}$ *est un fibré de $L\mathbb{R}$-module au dessus de chaque composante ouverte $C_\gamma \subset L\overline{M}$ définies par $C_\gamma = \{\gamma' \in L\overline{M} | \overline{\gamma}^*(TM) \approx \overline{\gamma'}^*(TM)$ en tant que $L\mathbb{R}$-module$\}$*

Afin de ne pas alourdir la démonstration, le terme "fibré au-dessus de $L\overline{M}$" signifiera restreint à un C_γ . On utilisera ici la notation $L\mathbb{R}$ plutôt que $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}$.

Démonstration. — Dans le cas du supercercle trivial, un superlacet γ est donné par un lacet $\overline{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to (\Pi\overline{TM})_0$. On a ainsi $SLM = L(\Pi\overline{TM})_0$ et puisque $\begin{array}{c} (\Pi\overline{TM})_0 \\ \downarrow \\ \overline{M} \end{array}$ est un fibré au dessus de $\overline{M}$, SLM est bien un fibré au dessus de $L\overline{TM}$, d'après la proposition 1.20.

Dans le cas général, soit $L\mathcal{L} = L\overline{M} \times \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\mathcal{L})$ le fibré trivial impair de $L\mathbb{R}$ module au-dessus de $L\overline{M}$. Puisque $\begin{array}{c} (\overline{TM})_1 \\ \downarrow \\ \overline{M} \end{array}$ est un fibré au dessus de $\overline{M}$, on peut définir le fibré $L(\overline{TM})_1$ de $L\mathbb{R}$ module au-dessus de $L\overline{M}$ toujours d'après la proposition 1.20.

On pose alors

$$E = L(\overline{TM})_1 \otimes_{L\mathbb{R}} L\mathcal{L}$$

comme fibré au dessus de $L\overline{M}$.

En un point $\gamma \in L\overline{M}$, la fibre $E_{\overline{\gamma}}$ est exactement l'ensemble des sections de $\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1 \otimes \mathcal{L} = (\gamma^*TM)_{11}$. On a donc une bijection entre SLM et E.

L'étude des ouverts de trivialisations de E va maintenant nous permettre de définir la topologie et la structure de variété fréchétique de SLM.

Soit g_0 une métrique sur $(\overline{TM})_0 = T\overline{M}$, g_1 une métrique sur $\Pi(\overline{TM})_1$ et ∇ une connexion C^∞ compatible avec g_1. Notre espace de superlacet contient l'espace $L\overline{M}$ des lacets qu'on supposera muni de l'atlas défini en 1.1.6 avec η une addition locale définie sur toute la variété et obtenue à partir de g_0. On notera pour un lacet $\overline{\gamma}$, $U_{\overline{\gamma}}$ l'ouvert de carte de $L\overline{M}$ contenant $\overline{\gamma}$ et d'homéomorphisme $\Psi_{\overline{\gamma}} : \overline{\gamma}^*T\overline{M} \to U_{\overline{\gamma}}$.

D'après la proposition 1.21, la connexion ∇ se lace en une connexion ∇^L sur $L(\Pi(\overline{TM})_1)$ et définit ainsi un transport parallèle C^∞ des sections de $L(\Pi(\overline{TM})_1)$ le long de chemins dans $L\overline{M}$. Par trivialité du fibré $L\mathcal{L}$, on peut transporter de manière triviale les sections des fibres de $L\mathcal{L}$. Le transport parallèle est le transport parallèle habituel point par point et est donc $L\mathbb{R}$ linéaire.

On peut donc définir un transport parallèle C^∞ sur $E = L(\overline{TM})_1 \otimes_{L\mathbb{R}} L\mathcal{L}$ au dessus de $L\overline{M}$.

Soit s_0 une section de $(\overline{\gamma}^*TM)_0 = T_{\overline{\gamma}L\overline{M}}$, alors on peut définir le chemin de lacets :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{s_0} & : & [0,1] & \to & L\overline{M} \\ & & t & \mapsto & \eta(t\ s_0) \end{array}$$

dont la fonction adjointe est la fonction C^∞

$$\begin{array}{rccc} \tilde{s_0}^\vee & : & [0,1]\times\mathbb{S}^1 & \to & \overline{M} \\ & & (t,x) & \mapsto & \eta(t\ s_0(x)) \end{array}$$

D'après le théorème 1.17, le chemin $\tilde{s_0}$ est bien C^∞. On peut alors transporter parallèlement le long de $\tilde{s_0}$ tout point de la fibre $E_{\overline{\gamma}}$ vers un point de la fibre $E_{\eta(s_0)}$. On note $P_{\tilde{s_0}}$ ce transport parallèle : il permet d'identifier les fibres $E_{\overline{\gamma}}$ et $E_{\eta(s_0)}$. Mais puisque tout lacet $\overline{\gamma'} \in U_{\overline{\gamma}}$ correspond à une unique section $s_0 \in (\overline{\gamma}^*TM)_0$ les transports parallèles permettent d'identifier toutes les fibres $E_{\overline{\gamma'}}$ au dessus de $U_{\overline{\gamma}} \subset L\overline{M}$ à l'espace de Fréchet $E_{\overline{\gamma}} = \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L}$. Ceci montre au passage que les C_γ sont ouvertes. On a donc pour tout superlacet γ une bijection

$$\begin{array}{rccc} \Psi_\gamma & : & \Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L}) & \to & SLM \\ & & s_0 \oplus s_1 & \mapsto & (\eta(s_0), P_{\tilde{s_0}}(s_1)) \end{array}$$

On note :

$$U_\gamma = \{\gamma' \in \mathrm{Im}(\Psi_\gamma)\} \subset SLM$$

Définition 35. — *La topologie sur SLM sera alors la topologie engendrée par les U_γ càd un ensemble $U \subset SLM$ sera ouvert ssi $\forall\gamma \in SLM, \Psi_\gamma^{-1}(U)$ est un ouvert de $(\overline{\gamma}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L}$.*

Pour terminer la démonstration de la structure de variété de Fréchet, il ne reste plus qu'à vérifier que les changements de cartes sont bien C^∞.

Soit γ_α et γ_β deux superlacets. Notons $U_{\alpha,\beta} = \Psi_{\gamma_\alpha}^{-1}(U_{\gamma_\alpha} \cap U_{\gamma_\beta})$ et $U_{\beta,\alpha} = \Psi_{\gamma_\beta}^{-1}(U_{\gamma_\alpha} \cap U_{\gamma_\beta})$, l'application de changement de carte sécrit :

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{\gamma_\beta}^{-1}\circ\Psi_{\gamma_\alpha} & : & U_{\alpha,\beta} & \to & U_{\beta,\alpha} \\ & & (s_0,s_1) & \mapsto & (\Psi_{\overline{\gamma_\beta}}^{-1}\circ\Psi_{\overline{\gamma_\alpha}}(s_0), P^{-1}_{\widetilde{\Psi_{\overline{\gamma_\beta}}^{-1}\circ\Psi_{\overline{\gamma_\alpha}}(s_0)}} \circ P_{\tilde{s_0}}(s_1)) \end{array}$$

D'après les résultats sur les espaces de lacets §1.1.6 ou **[Sta05]**, $s_0 \to \Psi^{-1}_{\overline{\gamma_\beta}} \circ \Psi_{\overline{\gamma_\alpha}}(s_0)$ est C^∞ il suffit donc de montrer que $(s_0, s_1) \to P^{-1}_{\widetilde{\Psi^{-1}_{\overline{\gamma_\beta}} \circ \Psi_{\overline{\gamma_\alpha}}(s_0)}} \circ P_{\tilde{s_0}}(s_1)$ est C^∞. Or cette application est simplement l'application lacée ϕ^L restreinte à l'ouvert des sections $\Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L}) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1, (\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L})$ de l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & (\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma_\alpha}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L} & \to & (\overline{\gamma_\beta}^*TM)_1 \\ & & (s_0(x), s_1(x)) & \mapsto & P^{-1}_{\widetilde{\Psi^{-1}_{\overline{\gamma_\beta}} \circ \Psi_{\overline{\gamma_\alpha}}(s_0(x))}} \circ P_{\tilde{s_0(x)}}(s_1(x)) \end{array}$$

Le transport parallèle est donné par la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient C^∞. La solution dépend donc de manière C^∞ des paramètres $(s_0(x), s_1(x))$. L'application ϕ est donc bien C^∞ et d'après 1.18, ϕ^L aussi.

Ainsi les applications de changements de cartes sont bien des applications C^∞ entre espaces de Fréchet.

Enfin, les applications de trivialisations $\check{\Psi}_\gamma$ sont alors simplement de la forme :

$$\begin{array}{cccc} \check{\Psi}_\gamma & : & SLM \supset U_\gamma & \to & U_{\overline{\gamma}} \times (\overline{\gamma}^*TM)_1 \otimes L \\ & & (\eta(s_0), P_{\tilde{s_0}}(s_1)) & \mapsto & (\eta(s_0), s_1) \end{array}$$

Vu dans les cartes $\check{\Psi}_\gamma$ envoie $s_0 \oplus s_1$ sur $s_0 \oplus s_1$. C'est donc bien une application C^∞ entre espaces de Fréchet.

$\square$

Corollaire 2.12. — *Si M est orientable, alors* $\begin{array}{c} SLM \\ \downarrow \\ L\overline{M} \end{array}$ *est un fibré de de $L\mathbb{R}$-module au dessus de $L\overline{M}$.*

Démonstration. — Si M est orientable, alors $\forall \gamma \in LM$, $C_\gamma \approx L\overline{M}$ en tant que $L\mathbb{R}$-module (cf **[Sta05]**). $\square$

2.3. Le super-espace des super-lacets

Quoi qu'il en soit, notre espace de superlacets n'est pas encore satisfaisant en tant qu'espace de morphismes. Des variables impaires cachées visibles seulement au niveau infinitésimal sont à expliciter. Avant d'introduire ce que l'on considèrera comme la bonne notion pour nos espaces de superlacets, à savoir celle de foncteur de points, nous allons continuer une étude à la main et en coordonnées. Celle-ci a l'avantage de décrire notre espace de superlacets comme une variété de Fréchet muni d'un préfaisceau de sections impaires. Cependant elle a l'inconvénient de ne pas fournir canoniquement de super-structure bien que les faisceaux que l'on considère soient choisis pour que les variables impaires qui apparaissent soient de natures similaires à celles des variables impaires introduites lorsque l'on considère le foncteur de points.

2.3.1. Une première version. —

On tente maintenant de munir notre variété de Fréchet d'un faisceau de superalgèbres que l'on note $\mathcal{O}_{SLM}$. En tant que variété de Fréchet, celle-ci est déjà munie d'un faisceau que l'on notera $\mathcal{O}_{\overline{SLM}}$ de fonctionnelles C^∞ à valeurs réelles.

Les choix à notre disposition ne sont à priori pas restreints cependant, il serait raisonnable que l'espace de dérivations qu'il engendre corresponde à la partie impaire des vecteurs tangents introduite, càd $(T_\gamma(SLM))_1 \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1 \oplus (\overline{\gamma}^*(\mathrm{Ker}(d\pi)))_{01})$.

Tout d'abord nous introduisons à titre d'exemple un faisceau de superalgèbres qui ne vérifiera pas cette condition. Ensuite, nous introduisons deux fibrés en superalgèbres qui engendrent la partie impaire de l'espace tangent.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\overline{M}$ et soit ϕ, l'application définie par :

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{S}^1 \times SLM & \mapsto & \overline{M} \\ & & (x,\gamma) & \to & \overline{\gamma}(x) \end{array}$$

On peut donc définir l'image réciproque $\phi^{-1}(\mathcal{F})$ du faisceau $\mathcal{F}$. On obtient un préfaisceau au dessus de $\mathbb{S}^1 \times SLM$.

Pour tout ouvert $U \subset \mathbb{S}^1 \times SLM$, $\phi^{-1}(\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{V \supset \phi(U)} \mathcal{F}(V)$ et si $\phi(U)$ est un ouvert, on a :

$$\phi^{-1}(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\phi(U))$$

Maintenant soit $\pi : \mathbb{S}^1 \times SLM \to SLM$ la projection sur le deuxième facteur. On peut pousser en avant le préfaisceau $\phi^{-1}(\mathcal{F})$ pour obtenir le préfaisceau $\pi_*(\phi^{-1}(\mathcal{F}))$ au dessus de SLM et défini par :

$$\forall U \subset SLM,\ U \text{ ouvert},\ \pi_*(\phi^{-1}(\mathcal{F}))(U) = \phi^{-1}(\mathcal{F})(\mathbb{S}^1 \times U)$$

Lemme 2.13. — *$\forall U \subset SLM$, U ouvert, $\phi(\mathbb{S}^1 \times U) \subset \overline{M}$ est ouvert.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de SLM. Soit $y \in \phi(\mathbb{S}^1 \times U)$. Par définition, il existe $\gamma \in U$ et $x \in \mathbb{S}^1$ tels que $y = \overline{\gamma}(x)$. Maintenant, U est ouvert ssi $\Psi_\gamma^{-1}(U \cap U_\gamma)$ est ouvert dans $\Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^*TM)_0 \oplus (\overline{\gamma}^*TM)_1 \otimes \mathcal{L})$. Notons $\tilde{U}_\gamma$ cet ouvert qui contient la section nulle. L'addition locale est une application ouverte donc l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 \times \tilde{U}_\gamma & \mapsto & \phi(\mathbb{S}^1 \times U) \\ (t, s_0 \oplus s_1) & \to & \eta(s_0)(t) \end{array}$$

envoie un voisinage de $(\mathbb{S}^1, 0)$ sur un voisinage de $\eta(0) = y$ et ainsi, il existe un ouvert inclus dans $\phi(\mathbb{S}^1 \times U)$ autours de y. $\square$

On en déduit que :

$$\forall U \subset SLM,\ U \text{ ouvert},\ \pi_*(\phi^{-1}(\mathcal{F}))(U) = \mathcal{F}(\phi(\mathbb{S}^1 \times U))$$

Et ainsi,

Proposition 2.14. — *Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ au-dessus de $\overline{M}$, on peut définir un faisceau $\mathcal{F}^L$ au-dessus de SLM définit par :*

$$\forall U \subset SLM,\ U \text{ ouvert},\ \mathcal{F}^L(U) = \mathcal{F}(\phi(\mathbb{S}^1 \times U))$$

Maintenant considérons le faisceau $\mathcal{O}_M$ et $\mathcal{N}$ le faisceau de l'idéal des éléments nilpotents.

On peut alors considérer le faisceau $\mathcal{O}_M/(\mathcal{N})^2$. C'est un faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ module localement libre de dimension $1|q$. En effet, bien que l'on ait pas d'injection canonique de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ dans $\mathcal{O}_M$, on en a une de $\mathcal{O}_{\overline{M}}$ dans $\mathcal{O}_M/(\mathcal{N})^2$.

Par construction, le faisceau $(\mathcal{O}_M/(\mathcal{N})^2)_1^L$ est un $(\mathcal{O}_{\overline{M}})_1^L$-supermodule de dimension $0|q$. Soit A le faisceau d'algèbres graduées engendrée par $\mathcal{O}_M/(\mathcal{N})_1^2$. Son faisceau de dérivations est exactement le faisceau $(\overline{TM})_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{M}}} A$. De plus, on a, par construction, que A^L est le faisceau d'algèbres engendré par $(\mathcal{O}_M/(\mathcal{N})_1^2)^L$. C'est donc aussi un $(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L$-module.

De plus, $(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{SLM}}$. Si s est une section de $(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L(U)$ alors s définit la fonctionnelle :

(2.3.1)

$$\begin{array}{ccc} U \subset SLM & \mapsto & \mathbb{R} \\ \gamma & \to & \int_{\mathbb{S}^1} s(\overline{\gamma}(x)) \end{array}$$

On peut alors munir notre espace de superlacets du faisceau de superalgèbres :

$$\mathcal{O}_{\overline{SLM}} \otimes_{(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L} A^L$$

Cependant, ce n'est pas le faisceau recherché. Au niveau des dérivations, l'on a rajouté les dérivations $(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L$-linéaires de A^L càd $\mathrm{Der}_{(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L}(A^L)$.

Or par construction,

$$\mathrm{Der}_{(\mathcal{O}_{\overline{M}})^L}(A^L) \approx (\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_{\overline{M}}}(A))^L \approx ((\overline{TM})_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{M}}} A)^L$$

L'espace tangent en un lacet γ qu'il induit est alors simplement $\overline{\gamma}^{-1}(\overline{TM})_1 \neq \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1)$. Il manque toute la partie section au-dessus de $\mathbb{S}^1$: l'on a un champ de vecteurs sur l'image du lacet et non sur le lacet lui-même en tant qu'application.

Pour remédier à ce problème, on regarde à la place de l'application ϕ, l'application ψ définie par :

$$\begin{array}{cccc} \psi & : \mathbb{S}^1 \times SLM & \mapsto & \mathbb{S}^1 \times \overline{M} \\ & (x, \gamma) & \to & (x, \overline{\gamma}(x)) \end{array}$$

A tout préfaisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{S}^1 \times \overline{M}$ on définira le préfaisceau $\pi_* \Psi^{-1}(\mathcal{F})$ sur SLM que l'on notera encore $\mathcal{F}^L$.

On définit maintenant le préfaisceau $(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L$. C'est un $(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L$ module et par la même application 2.3.1 que précédemment, $(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_{\overline{SLM}}$.

On pourra donc définir le faisceau de super-algèbres sur SLM :

$$\mathcal{O}_{\overline{SLM}} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L$$

Il nous reste à montrer que :

Proposition 2.15. — *Soit $\gamma \in SLM$. L'espace tangent de SLM muni du faisceau $\mathcal{O}_{\overline{SLM}} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L$ au point γ est :*

$$(T_\gamma(SLM))_0 \oplus \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1)$$

Démonstration. — Cette fois l'on a rajouté les dérivations $(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_{\overline{M}})^L$-linéaires de $(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L$ càd $\mathrm{Der}_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}})^L}((\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L)$.

Or par construction,

$$\mathrm{Der}_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}})^L}((\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L) \approx (\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}}}(A))^L \approx (\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} (\overline{TM})_1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}}} A)^L$$

Et ainsi, en un lacet γ, on retrouve bien l'espace tangent $\Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1)$. $\square$

Pour la partie $\Gamma_{\mathbb{S}^1}((\overline{\gamma}^*(\mathrm{Ker}(d\pi)))_{01})$, l'on prendra le faisceau $(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}}} \Omega^*(\overline{M}))^L$. La démonstration est la même.

Et on a :

Proposition 2.16. — *L'espace SLM des superlacets muni du faisceau de superalgèbres :*

$$\mathcal{O}_{\overline{SLM}} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1} \otimes_{\mathbb{R}} A)^L \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}})^L} (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}\otimes_{\mathbb{R}}\mathcal{O}_{\overline{M}}} \Omega^*(\overline{M}))^L$$

admet en tout point γ un espace tangent dont la partie impaire est :

$$(T_\gamma(SLM))_1 \approx \Gamma_{\mathbb{S}^1}(\overline{\gamma}^*(\overline{TM})_1 \oplus (\overline{\gamma}^*(Ker(d\pi)))_{01})$$

On a ainsi réussi à voir notre espace de superlacets comme une variété de Fréchet munie d'un faisceau de superalgèbres. Une justification à l'introduction de ces variables impaires est donnée par l'espace tangent.

Cependant, à partir de maintenant, l'on considère l'espace des lacets d'un autre point de vue, celui du foncteur de points.

En effet l'aide de la description en tant que foncteur de points, les variables impaires apparaissent de manière naturelle. D'autre part, on obtient ainsi une description en coordonnées qui nous permettra de mener à bien nos calculs. De plus, l'on verra lors de la classification des formes symplectiques (cf la fin de la partie 3.1.2) que l'aspect foncteur de points permet de déterminer sans ambiguité la nature géométrique des coefficients.

2.3.2. Les super-lacets comme foncteur de points. —

Maintenant, l'on va regarder l'espace des super-lacets SLM dans une supervarité M comme un foncteur de points. Contrairement à l'approche précédente, celle-ci permet une description de n'importe quel espace de superlacets $S_{\mathbb{S}^{1|n}}LM$ et sera donc celle que l'on adoptera par la suite.

Maintenant, à toute supervariété S, l'espace de superlacets associe l'ensemble $SLM(S)$ qui est l'ensemble des morphismes $p : S \to LM$.

On transpose alors la propriété d'exponentialité du cas classique (voir [**Ham82**], [**KM97**]) que $C^\infty(S, C^\infty(\mathbb{S}^1, M)) = C^\infty(S \times \mathbb{S}^1, M)$ au cas super en imposant au foncteur $\underline{SLM}$ la définition suivante :

Définition 36. — *L'espace des superlacets SLM sera défini comme le foncteur $\underline{SLM}$ de la catégorie des super-variétés* ***SM*** *dans la catégorie des ensembles* ***Ens*** *tel que :* $\forall S, S' \in$ ***SM*** *et* $f \in Hom_{\boldsymbol{SM}}(S, S')$,

$$\underline{SLM}(S) = Hom_{\boldsymbol{SM}}(S \times \mathbb{S}^{1|1}, M)$$

$$\underline{SLM}(f)(\phi^*) = (f^* \otimes 1) \circ \phi^*$$

$$\textit{pour } \phi^* \in Hom_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_{S^{1|1}})$$

On notera $\mathcal{O}_{SLM}$ la superalgèbre telle que

$$\forall S \in \mathbf{SM}, \quad \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_{SLM}, \mathcal{O}_S) \approx \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}} \otimes \mathcal{O}_S)$$

On peut donner une idée intuitive de comment le foncteur de points fait apparaitre les variables impaires.

Regardons de 2 manières un S-point p de LM.

Pour simplifier les choses, l'on prend $M = \mathbb{R}^{p|q}$ et $S = \mathbb{R}^{s|t}$ muni du système de coordonnées (s^j, η^β).

Un superlacet s'écrit :

$$\gamma^*(x^i) = x^{i*}$$
$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \theta\lambda^\alpha(x)$$

Comme mentionné précédemment, on peut voir les fonctions précédentes x^{i*} et λ^α comme des familles de fonctionnelles sur SLM paramétrées par $\mathbb{S}^{1|1}$.

On peut alors prendre leur image par p^*. Les fonctions $p^*(x^{i*})$ et $p^*(\lambda^\alpha)$ sont alors des fonctions sur $S \times \mathbb{S}^{1|1}$ et celles-ci sont de la forme :

$$p^*(x^{i*}) = x^{i*} \circ \overline{p} + \sum_{I^+} p^i_{I^+} \eta^{I^+}$$
$$p^*(\xi^\alpha) = \theta \sum_{I^+} p^\alpha_{I^+} \eta^{I^+}$$

Maintenant, on regarde le S-point p comme un morphisme de $S \times \mathbb{S}^{1|1}$ dans M. On a :

$$\gamma^*(x^i) = x^i \circ \overline{\gamma} + \sum_{I^+} \gamma^i_{I^+} \eta^{I^+} + \theta \sum_{I^-} \gamma^i_{I^-} \eta^{I^-}$$
$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \sum_{I^-} \gamma^\alpha_{I^-} \eta^{I^-} + \theta \sum_{I^+} \gamma^\alpha_{I^+} \eta^{I^+}$$

On voit donc que les superlacets précédents sont insuffisants pour décrire le foncteur de points : il manque les termes $\theta \sum_{I^-} \gamma^i_{I^-} \eta^{I^-}$ et $\sum_{I^-} \gamma^\alpha_{I^-} \eta^{I^-}$.

En un sens, il manque des variables impaires.

L'idée du foncteur de point est que l'on peut généraliser les superlacets de la manière suivante :

$$\gamma^*(x^i) = x^{i*} + \theta\lambda^i$$
$$\gamma^*(\xi^\alpha) = \theta\lambda^\alpha + \zeta^\alpha$$

où les λ^i et les ζ^α sont des “fonctions impaires” de $\mathbb{S}^1$.

Les fonctions λ^i et ζ^α n'ont pas réllement de valeur et ne sont pas forcément représentables, notamment à cause de la condition de cocycle. Néanmoins, ces “fonctions impaires“ prennent tout leur sens évaluées en des S-points ce qui permet de considérer leurs dérivées par rapport à x et θ.

Maintenant, regardons le foncteur tangent du foncteur de points.

Définition 37. — *Soit M une supervariété et $\underline{M}$ son foncteur de points. Le foncteur tangent $T\underline{M}$ du foncteur des points est le foncteur qui a toute supervariété S associe l'ensemble :*

$$T\underline{M}(S) = Hom_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathbb{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \otimes \mathcal{O}_S)$$

Dans le cas d'une supervariété, on a alors le résultat suivant :

Proposition 2.17. — *Soit M une supervariété, alors le foncteur tangent du foncteur de point est naturellement isomorphe au foncteur de point du fibré tangent TM de M.*

$$T\underline{M} = \underline{TM}$$

Démonstration. — Le point clé de la démonstration est que le faisceau structural du fibré tangent est l'algèbre symétrique graduée du dual des dérivations $\mathcal{O}_{TM} = S_{\mathcal{O}_M}(\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^*)$. Ce faisceau est un faisceau de $\mathcal{O}_M$-module localement libre engendré en tant qu'algèbre par $\mathcal{O}_M$ et $(\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^*)$. Maintenant soit S une supervariété et ϕ un S-point de TM càd $\phi \in \mathrm{Hom}_{alg}(S_{\mathcal{O}_M}(\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^*), \mathcal{O}_S)$, ϕ est donc complètement déterminé par son action sur $\mathcal{O}_M$ et $(\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^*)$. Notons ϕ_0 et ϕ_1 ces deux restrictions :

$$\begin{array}{ccccc} \phi_0 & : & \mathcal{O}_M & \to & \mathcal{O}_S \\ & & f & \mapsto & \phi_0(f) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \phi_1 & : & (\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^* & \to & \mathcal{O}_S \\ & & \alpha & \mapsto & \phi_1(\alpha) \end{array}$$

Puisque $\mathcal{O}_M$ est un faisceau de sous-algèbres de $\mathcal{O}_T M$, ϕ_0 est simplement un S-point de M.

Maintenant, puisque les faisceaux sont fins, on peut travailler localement pour déterminer ϕ_1. Ainsi dans un ouvert U de trivialisation, tout $\alpha \in (\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M)^*(U)$ s'écrit : $\alpha = \alpha_i dx^i$ avec $\alpha^i \in \mathcal{O}_M(U)$. Il suffit donc de déterminer les images $\phi_1(dx^i)$. Dans un changement de carte, $dy^j = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$, on a $\phi_1(dy^j) = \phi_0(\dfrac{\partial y^j}{\partial x^i})\phi_1(dx^i)$ ce qui permet d'interpréter les $\phi_1(dx^i)$ comme les coordonnées d'une dérivation de $\mathcal{O}_M$ dans $\mathcal{O}_S$ le long de ϕ_0. Autrement dit, ϕ_1 est complètement déterminer et ce de manière unique par un élément $\tilde{\phi} \in \mathrm{Der}_{\phi_0}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S)$.

Maintenant soit S une supervariété et $\phi \in \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathbb{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \otimes \mathcal{O}_S)$. Soit $f \in \mathcal{O}_M$, on peut écrire $\phi(f) = \phi_0(f) + \varepsilon\phi_1(f)$. Soit $g \in \mathcal{O}_M$, par propriété de morphisme d'algèbres, on a :

$$\phi_0(fg) = \phi_0(f)\phi_0(g)$$

$$\phi_1(fg) = \phi_1(f)\phi_0(g) + \phi_0(f)\phi_1(g)$$

càd ϕ_0 est un S-point de M et $\phi_1 \in \mathrm{Der}_{\phi_0}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S)$.

Donc on peut facilement identifier les objets $T\underline{M}(S)$ et $\underline{TM}(S)$ dans la catégorie des ensembles.

Maintenant soit S' une autre supervariété et $\psi : S' \to S$ un morphisme de supervariété.

L'application $\begin{array}{cccc} T\underline{M}(\psi) & : & T\underline{M}(S) \to & T\underline{M}(S') \\ & & \phi \mapsto & (\psi \otimes 1) \circ \phi \end{array}$ envoie naturellement le S-point ϕ_0 sur le S-point $\psi \circ \phi_0$ et ϕ_1 sur $\psi \circ \phi_1 \in \mathrm{Der}_{\psi\circ\phi_0}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S)$.

Quant à l'application $\begin{array}{cccc} \underline{TM}(\psi) & : & \underline{TM}(S) \to & \underline{TM}(S') \\ & & \phi \mapsto & \psi \circ \phi \end{array}$, elle envoie naturellement le S-point ϕ_0 sur le S-point $\psi \circ \phi_0$ et ϕ_1 sur $\psi \circ \phi_1$ défini alors simplement par la dérivation $\psi \circ \tilde{\phi} \in \mathrm{Der}_{\psi\circ\phi_0}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S)$.

Ainsi, il existe bien une transformation naturelle bijective entre ces deux foncteurs! □

Cela nous permet d'écrire :

$$\forall S \in SM, \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_S \otimes \mathbb{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_{TM}, \mathcal{O}_S)$$

On a maintenant la proposition suivante :

Proposition 2.18. —

$$T\underline{SLM} = \underline{SLTM}$$

Démonstration. — Soit S une supervariété.

On a : $\underline{SLM}(S) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_{LM}, \mathcal{O}_S) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}} \otimes \mathcal{O}_S)$ et ainsi :

$T\underline{SLM}(S) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_{LM}, \mathcal{O}_S \otimes \mathbb{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}} \otimes \mathcal{O}_S \otimes \mathbb{R}[\varepsilon]/\varepsilon^2) = \mathrm{Hom}_{alg}(\mathcal{O}_{TM}, \mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}} \otimes \mathcal{O}_S) = \underline{SLTM}(S)$ □

2.4. Fonctionnelles sur l'espaces des super-lacets

Dans cette partie nous allons introduire le formalisme de l'espace des jets. Celui-ci permettra d'une part de donner un sens mathématique rigoureux aux fonctionnelles de Mokhov et de justifier proprement l'action des champs de vecteurs. Et d'autre part, de généraliser les fonctionnelles locales à n'importe quel espace de morphismes de supervariétés $X \to M$.

2.4.1. Espace des jets. —

Dans cette partie, on introduit l'espace des jets qui nous permettra de définir nos fonctionnelles locales de manière intrinsèque. On renvoie à [**Pau10**] pour une approche plus géométrico-algébrique.

Soient N et X deux supervariétés et $\begin{array}{c} N \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$ une fibration. L'algèbre $\mathcal{O}_N$ est ainsi munie d'une structure de $\mathcal{O}_X$-module.

Soit $\mathcal{D}_X$ l'algèbre des opérateurs différentiels de $\mathcal{O}_X$. On a une inclusion $\iota : \mathcal{O}_X \to \mathcal{D}_X$ qui consiste à considérer la multiplication par une fonction comme un opérateur différentiel d'ordre 0. Ainsi tout $\mathcal{D}_X$-module est aussi un $\mathcal{O}_X$-module.

Puisque $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{D}_X$, une $\mathcal{D}_X$-algèbre est une $\mathcal{O}_X$-algèbre. Notons alors F le foncteur oubli de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-algèbres dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-algèbres. On notera J le foncteur adjoint tel que $\forall A$ $\mathcal{O}_X$-algèbre et $\forall B$ $\mathcal{D}_X$-algèbre

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X \mathrm{alg}}(J(A), B) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X \mathrm{alg}}(A, F(B))$$

La fibration $\pi : N \to X$ permet de munir $\mathcal{O}_N$ d'une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre et ainsi :

Définition 38. — *On appellera la $\mathcal{D}_X$-algèbre $J(\mathcal{O}_N)$ l'algèbre des jets de N au dessus de X.*

Par définition, celle-ci vérifie la propriétée universelle suivante :

Proposition 2.19. — *La $\mathcal{D}_X$-algèbre $J(\mathcal{O}_N)$ est la $\mathcal{D}_X$-algèbre universelle telle que pour tout morphisme ϕ de $\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{O}_N$ vers une $\mathcal{D}_X$-algèbre B, il existe un unique morphisme $\tilde{\phi}$ de $\mathcal{D}_X$-algèbre de $J(\mathcal{O}_N)$ vers B tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} J(\mathcal{O}_N) \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\ \mathcal{O}_N \arrow[u] \arrow[r, "\phi"'] & B \end{tikzcd}$$

Proposition 2.20. — *Soit $\mathcal{D}_X$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur X munie de sa structure de $\mathcal{O}_X$-module. Alors $J(\mathcal{O}_N)$ est l'algèbre engendrée par les $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ quotientée par la relation :*

$$\forall f, g \in \mathcal{O}_N, \quad (1 \otimes f)(1 \otimes g) = 1 \otimes fg$$

et munie de la $\mathcal{D}_X$-action :

$$\forall\ \partial_1 \otimes f \in \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N, \forall\ \partial_2 \in \mathcal{D}_X, \quad \partial_2.(\partial_1 \otimes f) = \partial_2 \partial_1 \otimes f$$

Démonstration. — Notons J cette algèbre quotientée. On peut définir l'injection $\iota : \mathcal{O}_N \to J$ par $\iota(f) = 1 \otimes f$. Par la condition $(1 \otimes f)(1 \otimes g) = 1 \otimes fg$, ce morphisme est bien un morphisme d'algèbre.

Soit B un $\mathcal{D}_X$ module et $\phi : \mathcal{O}_N \to B$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbre. Pour définir $\tilde{\phi}$ il suffit de définir sur les éléments $\partial \otimes f$ qui engendrent J et de vérifier qu'il passe au quotient. On pose alors :

$$\tilde{\phi}(\partial \otimes f) = \partial \otimes \phi(f)$$

Celui-ci est bien défini car $\tilde{\phi}((1 \otimes f)(1 \otimes g)) = \tilde{\phi}(1 \otimes f)\tilde{\phi}(1 \otimes g) = (1 \otimes \phi(f))(1 \otimes \phi(g)) = 1 \otimes \phi(f)\phi(g) = 1 \otimes \phi(fg) = 1 \otimes \tilde{\phi}(fg)$.

Et par définition, c'est bien un morphisme de $\mathcal{D}_X$ algèbre puisque $\tilde{\phi}(\partial_2.(\partial_1 \otimes f)) = \tilde{\phi}(\partial_2\partial_1 \otimes f) = \partial_2\partial_1 \otimes \phi(f) = \partial_2.\tilde{\phi}(\partial_1 \otimes f)$.

$\square$

De la propriété universelle, on conclut la proposition fondamentale suivante :

Corollaire 2.21. — *Soit σ une section de la fibration* $\begin{tikzcd} N \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend right, dotted, "\sigma"'] \end{tikzcd}$ *. Alors il existe un unique morphisme de D_X algèbre $\sigma^*_J : J(\mathcal{O}_N) \to \mathcal{O}_X$ tel que $\sigma^*_J|_{\mathcal{O}_N} = \sigma^*$.*

Démonstration. — Puisque $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_X$, $\sigma^* : \mathcal{O}_N \to \mathcal{O}_X$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbre. On conclut d'après la propriété universelle. $\square$

Soit $d \otimes f \in \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ un élément de $J(\mathcal{O}_N)$ et σ une section. Alors $\sigma^*_J(d \otimes f) = d(\sigma^*(f))$. Et puisque l'algèbre $J(\mathcal{O}_N)$ est engendrée par les éléments précédents, l'image de $J(\mathcal{O}_N)$ par σ^*_J est engendrée par les $d(\sigma^*(f))$.

Localement càd dans un système de coordonnées locales y^j, x^i de $\mathcal{O}_N$ avec y^i un système de coordonnées locales de $\mathcal{O}_X$, les éléments de $\mathcal{D}_X$ sont engendrés par $\mathcal{O}_X$ et les dérivations ∂_{y^i}. On a alors $\sigma^*_J(\partial_{y^i} \otimes f) = \partial_{y^i}(\sigma^*(f)) = \dfrac{\partial\sigma^*(x^j)}{\partial y^i}\sigma^*(\dfrac{\partial f}{\partial x^j})$. Cette forme est particulièrement intéressante puisqu'elle nous permet d'écrire localement les jets. En effet, chaque élément f de l'espace des jets $J(\mathcal{O}_N)$ définit une application des sections du faisceau $\Gamma_X(N)$ dans $\mathcal{O}_X$. Dans la suite, les superlacets seront vus comme des sections σ et les fonctionnelles comme des jets évalués en σ et intégrés sur le supercercle. Moralement, l'on est plus intéressé par $f(\sigma)$ que par $\sigma^*_J(f)$ même si ces deux quantités sont les mêmes.

Or localement, une section σ est déterminée par ses images du système de coordonnées $\sigma^*(x^i)$. Il serait donc approprier de pouvoir décrire localement les jets en termes de fonctions des $\sigma^*(x^i)$ et c'est exactement ce que l'écriture précédente permet. Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un multi-indice et ∂_α représente l'opérateur $\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial y_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial y_1^{\alpha_n}}$, le jet f prend la forme

$$f = f(y^j, \partial_\alpha(x^i))$$

telle que

$$f(\sigma) = f(y^j, \partial_\alpha(\sigma^*(x^i)))$$

avec α parcourant les multi-indices et f polyomiale en les $\partial_\alpha(x^i)$ pour $|\alpha| \geq 1$.

Dans la suite, on note $\partial_\alpha(x^i) = x^i_\alpha$.

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 2.22. — *Soit y^j un système de coordonnées locales de X, alors*

$$\partial_{y^j} = \sum_\beta x^i_{y^j\beta}\frac{\partial}{\partial x^i_\beta}$$

Dans la suite on ne travaille qu'avec des fonctionnelles locales qui ne dépendent que d'un nombre fini de dérivées x^i_α. Ceci s'exprime avec la notion de k-jets. En effet, l'algèbre $\mathcal{D}$ est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée engendrée par $(\mathcal{D})_1$ qui est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini localement libre. Contrairement à la structure à gauche, la structure de $\mathcal{O}_X$-module à droite ne respecte pas la graduation. Par contre celle-ci préserve la filtration $\mathcal{D}^k = \oplus_{j\leq k}\mathcal{D}_j$. Cette filtration s'étend au module $\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$ et on a les définitons suivantes :

Définition 39. — *Soit $k \in \mathbb{N}$, l'algèbre des k-jets est l'algèbre engendrée par $\mathcal{D}^k_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_N$.*

En coordonnées locales, les k-jets s'expriment comme des fonctions $f = f(y^j, \partial_\alpha(x^i))$ avec $|\alpha| \leq k$, càd les dérivations sont au plus d'ordre k.

On peut aussi chercher à avoir des k-jets localement sous la forme $f = f(y^j, \partial_\alpha(x^i))$ où f n'est pas seulement polynomiale en les $\partial_\alpha(x^i)$ mais C^∞. Il suffit pour cela d'introduire sur les k-jets une topologie adéquate et de compléter l'espace (cf [**Pau10**]).

On peut prendre dans un premier temps la topologie initiale qui rende toutes les applications σ^*_J continues pour $\sigma \in \Gamma_X(N)$. Toutes les fonctions sont alors dérivables en les $y^j, \partial_\alpha(x^i)$. On construit alors une topologie de Fréchet que l'on complète.

Dans la suite de nos calculs sur les formes symplectiques, excepté pour l'ordre 0, on considèrera la version algébrique des jets (voir [**?**]). Pour l'ordre 0, on verra que l'on s'y ramène. Dans tous les cas par limite inductive, on pourra se contenter de montrer les formules sur les $\partial \otimes f$.

2.4.2. $\mathcal{D}$-modules à droite, $\mathcal{D}$-modules à gauche et formes volumes. —

Dans la suite, l'on s'intéresse aux champs de vecteurs et aux formes différentielles. Or le dual d'un $\mathcal{D}_X$-module à gauche est un $\mathcal{D}_X$ module à droite. Le théorème suivant sera donc utile.

Théorème 2.23 **(Kashiwara)**. — *La catégorie Mod($\mathcal{D}^{op}_X$) des $\mathcal{D}_X$ modules à droite est équivalente à la catégorie Mod($\mathcal{D}_X$) des $\mathcal{D}_X$ modules à gauche.*

Ceci nous permettra de définir séparément champs de vecteurs et formes différentielles comme des $\mathcal{D}_X$ modules à gauche et au moyen de l'équivalence de catégorie que nous allons expliciter, d'évaluer par dualité les champs de multivecteurs comme $\mathcal{D}_X$ module à gauche sur les formes différentielles à valeurs dans les formes volumes munies d'une structure de $\mathcal{D}_X$ module à droite pour obtenir une forme volume que l'on pourra intégrer.

On renvoie à [**Kas03**] pour le détail de la démonstration.

Dans un premier temps, on introduit le faisceau des formes volumes. Si X est une variété, celui-ci correspond au faisceau des formes de degré maximal $\dim(X)$, noté Ω^{top}_X qui sont bien des formes volumes. Le choix d'une telle forme détermine une orientation.

Si X est une supervariété, il n'y a pas de formes de degré maximal mais l'on peut définir le faisceau en droites des formes volumes appelées aussi densités (cf 1.2.5) qui permettent d'intégrer les superfonctions à support compact sur la supervariété pour un choix d'orientation.

Dans tous les cas, l'on notera $Vol(X)$ le faisceau en droite des formes volumes sur X muni d'une orientation. L'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathrm{Vect}(X)$ agit sur $Vol(X)$ par dérivation de Lie. On a alors :

Proposition 2.24. — *Le faisceau $Vol(X)$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_X$ module à droite définie pour toute forme volume $\omega \in Vol(X)$, toute fontion $f \in \mathcal{O}_X$ et tout champs de vecteur $v \in Vect(X)$ par :*

$$\omega.f = \omega f$$

$$\omega.v = -(-1)^{v.\omega} L_v(\omega)$$

La démonstration de cette proposition repose sur les deux lemmes suivants.

Le premier permet de déduire l'action de $\mathcal{D}_X$ à partir de l'action de $\mathcal{O}_X$ et de $\mathrm{Vect}(X)$. En effet,

Lemme 2.25. — *Soit A un faisceau d'anneaux sur X, $\iota : \mathcal{O}_X \to A$ et $\phi : Vect(X) \to A$ des morphismes de faisceaux tels que :*

(i) *ι est un morphisme d'anneau.*
(ii) *ϕ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-module à gauche pour la structure de $\mathcal{O}_X$-module de A donnée par ι.*
(iii) *ϕ est un morphisme d'algèbre de Lie.*
(iv) *$\forall a \in \mathcal{O}_X$, $\forall v \in Vect(X)$, $[\phi(v), \iota(a)] = \iota(v(a))$.*

Alors il existe un unique morphisme d'anneau $\Phi : \mathcal{D}_X \to A$ tel que $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\Phi} A$ coïncide avec ι et $Vect(X) \hookrightarrow \mathcal{D}_X \xrightarrow{\Phi} A$ coïncide avec ϕ.

On cherche une $\mathcal{D}_X$ structure à droite sur $Vol(X)$, càd, on cherche à définir un morphisme $\Phi : \mathcal{D}_X \to End(Vol(X))^{op}$. La condition (ii) du lemme précédent se reformule en $\phi : \mathrm{Vect}(X) \to End(Vol(X))^{op}$ est $\mathcal{O}_X$ linéaire à gauche.

Le deuxième lemme montre que l'action définie dans la proposition vérifie bien cette condition (ii).

Lemme 2.26. — *$\forall a \in \mathcal{O}_X$ et $\forall v \in Vect(X)$, on a l'égalité d'opérateurs sur $Vol(X)$ suivante :*

$$L_{av} = (-1)^{a.v} L_v a$$

Proposition 2.27. — *L'équivalence de catégorie s'écrit :*

$$\begin{array}{ccc} Mod(\mathcal{D}_X) & \to & Mod(\mathcal{D}_X^{op}) \\ \mathcal{M} & \mapsto & Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \end{array}$$

Démonstration. — Sans rentrer dans les détails, Kashiwara montre que l'application ci-dessus est une équivalence de catégorie entre les $\mathcal{D}_X$ modules à gauche et les $Vol(X) \otimes \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{Hom}(Vol(X), \mathcal{O}_X)$ modules à gauche. L'application ϕ ci dessus permet alors l'identification $\mathcal{D}_X^{op} \approx Vol(X) \otimes \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{Hom}(Vol(X), \mathcal{O}_X)$. □

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.28. — *Tout $f \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_N)$ définit une application de l'espace des sections $\Gamma_X(N)$ dans $Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X = Vol(X)$*

$$\begin{array}{cccc} f: & \Gamma_X(N) & \to & Vol(X) \\ & \sigma & \mapsto & (\sigma_J^*)^{op}(f) \end{array}$$

2.4.3. Fonctionnelles locales. —

Maintenant, à titre d'exemple, nous allons expliciter les fonctionnelles de Mokhov en terme de jets et, définir les fonctionnelles des espace de superlacets.

En prenant $N = \mathbb{S}^1 \times M$ et $X = \mathbb{S}^1$, un lacet est bien une section de la fibration triviale $\begin{array}{c} \mathbb{S}^1 \times M \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^1 \end{array}$.

Maintenant, en utilisant le corollaire précédent, à tout jet $f \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_N)$ on peut associer une fonctionnelle F sur l'espace des lacets de la manière suivante :

$$F(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} (\gamma_J^*)^{op}(f)$$

Dans le cas de nos superlacets SLM, on prendra $N = \mathbb{S}^{1|n} \times M$, $X = \mathbb{S}^{1|n}$ et π la projection sur le premier facteur. Un superlacet est une section de $\mathbb{S}^{1|n} \to \mathbb{S}^{1|n} \times M$. D'après la proposition précédente, on peut évaluer les superlacets sur les éléments de l'algèbre des jets $Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}}} J(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n} \times M})$ pour obtenir une forme volume sur $\mathbb{S}^{1|n}$ que l'on peut alors intégrer pour obtenir ainsi un réel. Ainsi tout élément de l'algèbre des jets $Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}}} J(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n} \times M})$ définit une fonctionnelle sur l'espace des lacets.

Cependant, il nous faut évaluer nos fonctionnelles en des S-points. Pour toute supervariété S, les injections $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n} \times M} \hookrightarrow \mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M} \hookrightarrow J(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M})$ sont des morphismes de $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}}$-modules. De plus l'injection $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|n}} \hookrightarrow \mathcal{D}_{S \times \mathbb{S}^{1|n}}$ munit $J(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M})$ d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|n}}$ module. Par propriété universelle, on obtient une injection de $\mathcal{D}_{\mathbb{S}^{1|n}}$-modules:

$$J(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n} \times M}) \hookrightarrow J(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M})$$

Maintenant un superlacet γ en un S-point est une section de $S \times \mathbb{S}^{1|n} \to S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M$ au dessus de $S \times \mathbb{S}^{1|n}$ et ainsi tout jet $f \in Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}}^{1|n}} J(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n} \times M}) \subset Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}}^{1|n}} J(\mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n} \times M})$ définit une transformation naturelle $\underline{f}$ entre les foncteurs $\underline{SLM}$ et $\underline{\mathcal{O}}$ telle que pour toute supervariété S,

$$\begin{array}{cccc} \underline{f}(S) & : & \underline{SLM}(S) & \mapsto & Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_S \\ & & \sigma & \to & \sigma_J^*(f) \end{array}$$

car $Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}}^{1|n}} \mathcal{O}_{S \times \mathbb{S}^{1|n}} \approx Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_S$.

En intégrant sur $\mathbb{S}^{1|n}$ (après choix d'une orientation), on obtient, pour tout S-point σ une fonctionnelle $\underline{F}(S) : \underline{SLM}(S) \to \mathcal{O}_S$ définie par :

$$\underline{F}(S)(\sigma) = \int_{\mathbb{S}^{1|n}} \underline{f}(S)(\sigma)$$

Cependant, l'application qui à chaque jet associe une fonctionnelle n'est pas injectif. Par exemple, dans le cas des lacets, si F est la fonctionnelle F issue d'un jet f de la forme $f = dx\frac{d}{dx}(g)$ où x est une variable sur le cercle $\mathbb{S}^1$ alors pour toute section σ,

$$F(\sigma) = \int_{\mathbb{S}^1} dx \frac{d\sigma^*(g)}{dx} = 0$$

L'espace des fonctionnelles est en bijection avec le quotient de $Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_N)$ par le noyau de l'application $f \to F$ qui à un jet associe la fonctionnelle.

L'évaluation des fonctionnelles par les superlacets σ s'écrit :

$$Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_{X\times M}) \xrightarrow{(\sigma_J^*)^{op}} Vol(X) \xrightarrow{\int_X} \mathbb{R}$$

Le noyau de l'application $\int_X$ est l'ensemble des formes volumes $\nu = L_v(\mu) = -\mu.v$ avec $\mu \in Vol(X)$ et $v \in \mathrm{Vect}(X)$. Or pour tout superlacet σ, le morphisme $(\sigma_J^*)^{op}$ est un morphisme de $\mathcal{D}_X$-modules à droite. Une fonctionnelle sera donc nulle si elle provient d'un $f \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_{X\times M})$ de la forme $f = g.v$ avec $g \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_{X\times M})$ et $v \in \mathrm{Vect}(X)$. Et ainsi, on a :

Proposition 2.29. — *Les fonctionnelles locales sur SLM sont en bijection avec les éléments co-invariants de $Vol(\mathbb{S}^{1|n}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}}} J(\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|n}\times M})$ par l'action à droite de $Vect(\mathbb{S}^{1|n}) = \mathcal{D}^1_{\mathbb{S}^{1|n}}$.*

2.4.4. Champs de vecteurs. —

Maintenant, il faut pouvoir traduire l'action des vecteurs tangents et des champs de vecteurs sur les fonctionnelles précédentes.

Dans un premier temps, on voudrait définir les champs de vecteurs comme les dérivations de $J(\mathcal{O}_N)$. Cependant, cet espace est trop gros, en effet $J(\mathcal{O}_N)$ n'est pas notre espace de fonctionnelles : il faut prendre les co-invariants par l'action de $\mathcal{D}_X$, et ainsi pour les champs de vecteurs, les dérivations de $J(\mathcal{O}_N)$ qui sont linéaires en $\mathcal{D}_X$.

Définition 40. — *Un champs de vecteur sur l'espace des lacets sera une dérivation $\mathcal{D}_X$-linéaire de $J(\mathcal{O}_N)$ càd un élément de $Der_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N)) \subset Der(J(\mathcal{O}_N))$.*

Corollaire 2.30. — *Un vecteur tangent en un lacet γ est une dérivation $X \in Der_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N), \mathcal{O}_X)$ le long du morphisme $\gamma_J^* \in Hom_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N), \mathcal{O}_X)$ càd*

$$\forall f, g \in J(\mathcal{O}_N), \quad X(f\ g) = X(f)\gamma^*(g) + (-1)^{X.f}\gamma^*(f)X(g)$$

Cette définition nous serait peu utile si elle n'était pas reliée aux champs de vecteurs précédemment définis (cf §2.2.3) par $\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_{SLM}) \approx \mathrm{Vect}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} J(\mathcal{O}_{X\times M})$.

Par définition de l'algèbre des jets, on a pour toute $\mathcal{D}_X$-algèbre B l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-module :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X \mathrm{alg}}(J(\mathcal{O}_N), B) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X \mathrm{alg}}(\mathcal{O}_N, F(B))$$

En effet, un morphisme à droite est simplement déterminé par son image sur les $d \otimes f$ et par $\mathcal{D}_X$ linéarité celui-ci est simplement déterminé par son image sur $1 \otimes f$ càd f. De la même manière, puisque $J(\mathcal{O}_N)$ est une $\mathcal{D}_X$-algèbre, ceci implique que :

Proposition 2.31. —

$$Der_{\mathcal{D}_X alg}(J(\mathcal{O}_N), J(\mathcal{O}_N)) \approx Der_{\mathcal{O}_X alg}(\mathcal{O}_N, J(\mathcal{O}_N))$$

Corollaire 2.32. — *Si $N = X \times M$, l'espace des champs de vecteurs est isomorphe à Vect$(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} J(\mathcal{O}_N)$*

Démonstration. — On a : $\mathcal{O}_M \approx \mathcal{O}_N/\mathcal{O}_X$ et ainsi : $\mathrm{Der}(\mathcal{O}_M) \otimes_{\mathcal{O}_M} \mathcal{O}_N \approx \mathrm{Der}(\mathcal{O}_N)/\mathrm{Der}(\mathcal{O}_X) \approx \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_N)$.

De plus, $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X \mathrm{alg}}(\mathcal{O}_N, J(\mathcal{O}_N)) = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X \mathrm{alg}}(\mathcal{O}_N)) \otimes_{\mathcal{O}_N} J(\mathcal{O}_N)$. □

Dans la suite, nous explicitons cet isomorphisme. L'on verra que ce n'est pas un isomorphisme de $J(\mathcal{O}_N)$-module pour les structures induites naturellement par $\mathcal{O}_N$ à l'arrivée. Toutefois, ces structures de $J(\mathcal{O}_N)$-module induisent une structure de $\mathcal{D}_X$-module et cette application est bien un isomorphisme de $\mathcal{D}_X$-module.

On peut maintenant écrire localement, dans un système de coordonnées x^i sur M, un champs de vecteurs sous la forme : $X = X^i \partial_{x^i}$ avec $X^i \in J(\mathcal{O}_N)$ ou sous la forme $X = X^{i,\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$ avec $X^{i,\alpha} \in J(\mathcal{O}_N)$ puisque les éléments de l'algèbre des jets peuvent s'écrire comme des fonctions $f(y^j, \partial_\alpha x^i)$. Comment relier alors les X^i et les $X^{i,\alpha}$?

Si f est un jet de la forme $\partial_\alpha \otimes g$ avec α un multi-indice, alors par $\mathcal{D}_X$ linéarité, $X.f = (-1)^{\alpha.X} \partial_\alpha \otimes X.g$ et évalué au lacet γ, on a :

$$X.f(\gamma) = \gamma_J^*(X.f) = (-1)^{\alpha.X} \partial_\alpha(\gamma_J^*(X^i) \frac{\partial g}{\partial x^i})$$

Ceci va nous permettre de démontrer le résultat suivant :

Proposition 2.33. — *Soit $X \in Der_{\mathcal{O}_X alg}(\mathcal{O}_{X\times M}, J(\mathcal{O}_{X\times M}))$ et $f \in J(\mathcal{O}_{X\times M})$. Soit x^i un système de coordonnées locales sur M, et $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, alors :*

$$X.f = \sum_\beta (-1)^{X.\beta} \partial_\beta(X^i) \frac{\partial f}{\partial x^i_\beta}$$

Démonstration. — Il suffit de le montrer sur les jets de la forme $f = \partial_\alpha \otimes g$ avec α un multi-indice. On procède par récurrence sur la longueur de l'opérateur de dérivation ∂_α.

Si α est de longueur nulle, $f = 1 \otimes g \in \mathcal{O}_N$, alors pour tout multi-indice β de longueur strictement positive $\dfrac{\partial f}{\partial(x^i_\beta)} = 0$ donc on a bien $X.f = X^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_\beta (-1)^{X^i.\beta} \partial_\beta(X^i) \dfrac{\partial f}{\partial(x^i_\beta)}$.

Si α est de longueur 1, alors $f = x^i_\alpha \dfrac{\partial g}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i_\alpha} = \dfrac{\partial g}{\partial x^i}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} = (-1)^{x^i.\alpha} x^j_\alpha \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^i}$. Or,

$X.f = (-1)^{X.\alpha} \partial_\alpha(X^i \dfrac{\partial g}{\partial x^i}) = (-1)^{X.\alpha} \partial_\alpha(X^i) \dfrac{\partial g}{\partial x^i} + (-1)^{x^i.\alpha} X^i x^j_\alpha \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^i} = (-1)^{X.\alpha} X^i_\alpha \dfrac{\partial f}{\partial x^i_\alpha} + X^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie pour tout opérateur ∂_α de longueur k. Soit un opérateur différentiel de longueur $k+1$ de la forme $\partial_{y^j}\partial_\alpha$ et $g \in \mathcal{O}_N$, on a :

$f = \partial_{y^j}\partial_\alpha \otimes g = \sum_\gamma x^k_{y^j\gamma}\dfrac{\partial(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^k_\gamma}$.

Pour tout multi-indice β, on a :

si $\exists \delta, \beta = y^j\delta$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x^i_\beta} = \dfrac{\partial(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^i_\delta} + (-1)^{y^j.(i+\beta)}\sum_\gamma x^k_{y^j\gamma}\dfrac{\partial^2(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^k_\gamma \partial x^i_\beta}$

sinon, $\dfrac{\partial f}{\partial x^i_\beta} = (-1)^{y^j.(i+\beta)}\sum_\gamma x^k_{y^j\gamma}\dfrac{\partial^2(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^k_\gamma \partial x^i_\beta}$

et ainsi,

$\sum_\beta(-1)^{X.\beta}\partial_\beta(X^i)\dfrac{\partial f}{\partial x^i_\beta} = (-1)^{X.(y^j+\delta)}\sum_\delta \dfrac{\partial(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^i_\delta} + \sum_\beta(-1)^{X.\beta}(-1)^{y^j.(i+\beta)}\sum_\gamma x^k_{y^j\gamma}\dfrac{\partial^2(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^k_\gamma \partial x^i_\beta}$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}
X.\partial_{y^j}\partial_\alpha \otimes g &= (-1)^{X.y^j}\partial_{y^j}(X.(\partial_\alpha \otimes g)) \\
&= (-1)^{X.y^j}\partial_{y^j}\Big(\sum_\beta(-1)^{X.\beta}X^i_\beta\frac{\partial(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^i_\beta}\Big) \\
&= \sum_\beta(-1)^{X.(y^j+\beta)}X^i_{y^j\beta}\frac{\partial(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^i_\beta} + \sum_\beta(-1)^{X.\beta+y^j.(i+\beta)}\partial_\beta(X^i)\sum_\gamma x^k_{y^j\gamma}\frac{\partial^2(\partial_\alpha \otimes g)}{\partial x^k_\gamma \partial x^i_\beta} \\
&= \sum_\beta(-1)^{X.\beta}\partial_\beta(X^i)\frac{\partial f}{\partial x^i_\beta}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.34. — *Si $\mathcal{D}_X$ est localement engendré en tant que O_X-algèbre par un seul vecteur ∂_v, alors l'action d'un champs de vecteur $X = X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ sur un jet f s'écrit :*

$$X.f = \sum_s(-1)^{X.s.|\partial_v|}X^i_{(s)}\frac{\partial f}{\partial(x^i_{(s)})}$$

où l'indice $_{(s)} = \dfrac{\partial^s}{(\partial_v)^s}$.

On retrouve ainsi l'action des champs de vecteurs de Mokhov, voir proposition 1.4.

Maintenant, tout champs de vecteurs local $X \in \mathrm{Der}_{\mathcal{D}_X\mathrm{alg}}(J(\mathcal{O}_N), J(\mathcal{O}_N))$ peut s'écrire en coordonnées sous la forme $X = \sum_\beta(-1)^{X^i.\beta}X^i_\beta\dfrac{\partial}{\partial x^i_\beta}$. On peut ainsi facilement écrire le crochet de Lie de deux champs de vecteur.

Proposition 2.35. — *Soit $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ deux champs de vecteurs de $Der_{\mathcal{O}_X\,alg}(\mathcal{O}_N, J(\mathcal{O}_N))$ alors :*

$$[X,Y]^j = \sum_\beta(-1)^{X.\beta}X^i_\beta\frac{\partial Y^j}{\partial x^i_\beta} - (-1)^{X.Y}\sum_\beta(-1)^{Y.\beta}Y^i_\beta\frac{\partial X^j}{\partial x^i_\beta}$$

Démonstration. — Puisque $X = \sum_\beta X^i_\beta\dfrac{\partial}{\partial x^i_\beta}$ et $Y = \sum_\beta Y^j_\beta\dfrac{\partial}{\partial x^i_\beta}$, il suffit de montrer que pour tout multi-indice γ :

$(-1)^{(X+Y).\gamma}(\sum_\beta(-1)^{X.\beta}X^i_\beta\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_\beta}-(-1)^{X.Y}\sum_\beta(-1)^{Y.\beta}Y^i_\beta\dfrac{\partial X^j}{\partial x^i_\beta})_\gamma = \sum_\beta(-1)^{X.\beta+Y.\gamma}X^i_\beta\dfrac{\partial Y^j_\gamma}{\partial x^i_\beta}-$
$(-1)^{X.Y}\sum_\beta(-1)^{Y.\beta+X.\gamma}Y^i_\beta\dfrac{\partial X^j_\gamma}{\partial x^i_\beta}$

ce qui découle de la démonstration précédente puisque :

$(-1)^{(X+Y).\gamma}((-1)^{X.\beta}X^i_\beta\dfrac{\partial Y^j}{\partial x^i_\beta})_\gamma = (-1)^{(X+Y).\gamma}\partial_\gamma(X.Y^j) = (-1)^{Y.\gamma}X.(\partial_\gamma Y^j) =$
$(-1)^{Y.\gamma+X.\beta}X^i_\beta\dfrac{\partial Y^j_\gamma}{\partial x^i_\beta}$ □

L'espace $\mathrm{Der}(J(\mathcal{O}_N))$ est muni une filtration héritée de $J(\mathcal{O}_N)$. En effet, on peut définir $\forall k \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Der}(J(\mathcal{O}_N)))_k = \mathrm{Der}(J(\mathcal{O}_N)_k)$. Puisque $\mathrm{Der}_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N)) \subset \mathrm{Der}(J(\mathcal{O}_N))$, l'espace de nos champs de vecteur hérite lui-aussi d'une filtration.

On a :

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N))_k \approx \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_N, J(\mathcal{O}_N)_k)$$

Définition 41. — *Un champs de vecteur local Y est un champs de vecteur tel que :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, Y \in (Der_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N))_k$$

2.4.5. Formes et dualité. —

Nous allons construire les formes différentielles à partir des formes de Kälher.

Définition 42. — *Soit A et B deux algèbres telles que B soit une A-algèbre. Soit d un symbole tel que :*

- *$\forall x, y \in B, d(xy) = dx\ y + x\ dy$,*
- *$\forall a \in A, da = 0$*

On note $\Omega^1_A(B)$ l'espace des 1-formes de Kähler défini comme le B-module :

$$\Omega^1_A(B) = (\{x\ dy | x, y \in B\})$$

L'algèbre graduée des formes de Kähler est alors simplement définie par :

$$\Omega^*_A(B) = \Lambda^*(\Omega_A(B))$$

et le symbole d est étendu à $\Omega^*_A(B)$ comme la dérivation graduée pour la $\mathbb{Z}$-graduation telle que $d^2 = 0$.

Puisque $J(\mathcal{O}_N)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre, on peut définir l'algèbre de Kähler de l'algèbre des jets Ω^*

Définition 43. —

$$\Omega^* \approx \Omega^*_{\mathcal{O}_X}(J(\mathcal{O}_N))$$

La filtration de $J(\mathcal{O}_N)$ s'étend en une filtration de Ω^* avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Omega^*_k = \Omega^*_{\mathcal{O}_X}(J(\mathcal{O}_N)_k)$. Comme précédemment, on peut définir les formes locales.

Définition 44. — *Une forme $\omega \in \Omega^1(J(\mathcal{O}_N))$ est une forme locale si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in \Omega^*(J(\mathcal{O}_N)_k)$*

Proposition 2.36. — *Soit $\Omega^*_X(N) = \Omega^*(N)/\pi^*(\Omega^*(X))$ l'algèbre graduée des formes différentielles de N modulo les formes de X.*

Alors $J(\Omega^*_X(N))$ est naturellement une dg-algèbre.

Démonstration. — Tout d'abord, puisque $\Omega^*_X(N)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre, $J(\Omega^*_X(N))$ est bien définie. Celle-ci hérite de la $\mathbb{Z}$-graduation de $\Omega^*_X(N)$. De plus, toute forme de $\Omega^*_X(N)$ de degré ≥ 1 est une somme de produits extérieurs de 1-formes et $J(\Omega^*_X(N))$ est engendrée en tant qu'algèbre par les $\partial \otimes \omega$ avec $\partial \in \mathcal{D}_X$ et $\omega \in \Omega^1_X(N)$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $J(\Omega^*_X(N))^k = \Lambda^k J(\Omega^*_X(N))_1$ et ainsi $J(\Omega^*_X(N))$ est bien une algèbre graduée.

Montrons que l'algèbre $J(\Omega^*_X(N))$ est munie d'une dérivation de degré $+1$ et de carré nul.

Soit d_X la différentielle de De-Rham de $\Omega^*_X(N)$. Par définition, d_X est une dérivation $\mathcal{O}_X$ linéaire. On a l'injection $\Omega^*_X(N) \hookrightarrow J(\Omega^*_X(N))$ qui est $\Omega^*_X(N)$-linéaire et ainsi $\mathcal{O}_X$-linéaire. Donc par composition l'application $d_X : \Omega^*_X(N) \to J(\Omega^*_X(N))$ est $\mathcal{O}_X$ linéaire.

On obtient donc une dérivation $\mathcal{D}_X$ linéaire $d^J_X : J(\Omega^*_X(N)) \to J(\Omega^*_X(N))$ qui coïncide avec d_X sur $\Omega^*_X(N) \subset J(\Omega^*_X(N))$. Puisque l'algèbre $J(\Omega^*_X(N))$ est engendrée par les $\partial \otimes \omega$ avec $\partial \in \mathcal{D}_X$ et $\omega \in \Omega^*_X(N)$, la dérivation d^J_X est alors complètement déterminée par la formule :

$$\forall \partial \otimes \omega \in J(\Omega^*_X(N)), \quad d^J_X(\partial \otimes \omega) = \partial \otimes d_X(\omega)$$

On en déduit que $(d^J_X)^2 = 0$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, d^J : J(\Omega^*_X(N))_k \to J(\Omega^*_X(N))_{k+1}$.

□

Proposition 2.37. — *On a un isomorphisme de dg-algèbre et de $J(\mathcal{O}_N)$ module :*

$$\Omega^* \approx J(\Omega^*_X(N))$$

Démonstration. — Puisque l'algèbre Ω^* est engendrée en tant que dg-algèbre par $J(\mathcal{O}_N)$ et $\Omega^*_1 = \mathrm{Vect}_{J(\mathcal{O}_N)} d(J(\mathcal{O}_N))$ et que $J(\Omega^*_X(N))$ est engendré par $J(\Omega^*_X(N))_0 = J(\mathcal{O}_N)$ et $J(\Omega^*_X(N))_1 = Vect_{J(\mathcal{O}_N)}(\mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X(N)$ il suffit de montrer que $J(\Omega^*_X(N))_1 = \mathrm{Vect}_{J(\mathcal{O}_N)} d^J_X(J(\mathcal{O}_N))$.

L'inclusion de droite à gauche est évidente.

Soit $\partial_\alpha \otimes \omega \in J(\Omega^*_X(N))_1$, toute 1-forme $\omega \in (\Omega^*_X(N))_1$ s'écrit comme une somme de $gd_X(h)$ avec $g, h \in \mathcal{O}_N$. Pour simplifier, on suppose que $\omega = gd_X(h)$ et on a :

$\partial_\alpha \otimes \omega = \partial_\alpha \otimes gd_X(h) = \partial_\alpha \otimes gd^J_X(h) = \sum_{\{\alpha^1,\alpha^2\}=\alpha} (-1)^{p(\{\alpha^1,\alpha^2\},\alpha)+g.\partial_{\alpha_2}} (\partial_{\alpha^1} \otimes g)(\partial_{\alpha^2} \otimes (d_X(h))) = \sum_{\{\alpha^1,\alpha^2\}=\alpha} (-1)^{p(\{\alpha^1,\alpha^2\},\alpha)+g.\partial_{\alpha_2}} (\partial_{\alpha^1} \otimes g) d^j_X(\partial_{\alpha^2} \otimes h))$

avec $\partial_{\alpha^1} \otimes g, \partial_{\alpha^2} \otimes h \in J(\mathcal{O}_N)$.

où $\sum_{\{\alpha^1,\alpha^2\}=\alpha}$ signifie la somme sur toutes les partitions ordonnées de α càd que les indices des multi-indices α^1 et α^2 sont dans le même ordre que ceux de α qu'ils représentent. (On peut aussi sommer sur toutes les partitions mais il faut alors rajouter un facteur $\frac{|\alpha|!}{|\alpha^1|!|\alpha^2|!}$).

Et où $(-1)^{p(\{\alpha^1,\alpha^2\},\alpha)} \in \{0,1\}$ est définie de la manière suivante. Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha^1 = (\alpha^1_1, \cdots, \alpha^1_{k_1})$ et $\alpha^2 = (\alpha^2_1, \cdots, \alpha^2_{k_1})$, alors $(-1)^{p(\{\alpha^1,\alpha^2\},\alpha)}$ est la signature de la permutation :

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \to (\alpha^1_1, \cdots, \alpha^1_{k_1}, \alpha^2_1, \cdots, \alpha^2_{k_1})$$

□

Maintenant, l'on peut définir le produit intérieur ι d'une forme par un champs de vecteur.

Soit $Y = v^i \otimes y_i \in \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X\mathrm{alg}}(\mathcal{O}_N) \otimes_{\mathcal{O}_N} J(\mathcal{O}_N))$, on peut définir l'application $\iota(Y)$ qui est une dérivation $\mathcal{O}_X$-linéaire par :

$$\begin{array}{ccccc} \iota(Y) & : & \Omega^*_X(N) & \to & J(\mathcal{O}_N)\Omega^*_X(N) \subset J(\Omega^*_X(N)) \\ & & \omega & \mapsto & (-1)^{y^i.v^i} y_i \iota(v^i)\omega \end{array}$$

Par propriété universelle, on obtient une dérivation $\mathcal{D}_X$-linéaire de $J(\Omega^*_X(N))$ que l'on notera $\iota_J(Y)$ qui coïncide avec $\iota(Y)$ sur $\Omega^*_X(N) \subset J(\Omega^*_X(N))$:

$$\begin{array}{ccccc} \iota_J(Y) & : & J(\Omega^*_X(N)) & \to & J(\Omega^*_X(N)) \\ & & \partial \otimes \omega & \mapsto & (-1)^{\partial.Y} \partial \otimes \iota(Y)\omega \end{array}$$

Cette application est de degrés -1 pour la $\mathbb{Z}$-graduation de $J(\Omega^*_X(N))$.

Ainsi si $Y_1, \cdots, Y_k$ sont k champs de vecteurs, l'application $\iota_J(Y_1, \cdots, Y_k) = \iota_J(Y_1) \circ \cdots \circ \iota_J(Y_k)$ définit une application $\mathcal{D}_X$-linéaire de $J(\Omega^*_X(N))_k$ dans $J(\mathcal{O}_N)$.

On peut maintenant définir les formes différentielles sur notre espace de lacets.

En effet, soit $\omega \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\Omega^*_X(N))$, et $X_1, \cdots, X_k$ k-champs de vecteurs, on pourra évaluer ces k champs de vecteurs sur ω et cela de manière covariante par rapport à l'action à droite de $Vect(X)$ par :

$$(\iota(X_1, \cdots, X_k))^{op}\omega \in Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\mathcal{O}_N)$$

On peut donc aussi évaluer ces k-champs de vecteurs sur les co-invariants de $Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\Omega^*_X(N))$ pour l'action à droite de $Vect(X)$ et obtenir ainsi une fonctionnelle sur SLM.

Par $\mathcal{D}_X$-linéarité à droite du produit intérieur $(\iota)^{op}$, les éléments co-invariants sont donc des applications multilinéaires sur TM à valeur dans les fonctionnelles. Les formes seront alors simplement le sous-espace des applications (super)-antisymétriques.

Définition 45. — *Soit X un supercercle. Une k-forme ω sur l'espace des superlacets sera un élément co-invariant pour l'action à droite de $Vect(X) \subset \mathcal{D}_X$ sur le $\mathcal{D}_X$-module à droite $Vol(X) \otimes_{\mathcal{O}_X} J(\Omega^*_X(N))^k$ telle que l'application ω :*

$$\begin{array}{cccc} \omega & : & Der_{\mathcal{D}_X}(J(\mathcal{O}_N))^k & \rightarrow & \mathcal{F} \\ & & X_1, \cdots, X_k & \mapsto & (\iota(X_1, \cdots, X_k))^{op}\omega \end{array}$$

soit complètement antisymétrique.

Remarque. — *Comme pour les fonctionnelles la structure d'algèbre des formes disparait lorsque l'on passe aux co-invariants.*

En coordonnées, une fonctionnelle locale ω s'écrira :

$$\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega = \int_X (-1)^? (X_1)^{i_1}_{\beta_1} \cdots (X_k)^{i_k}_{\beta_k} \omega^{\beta_1 \cdots \beta_k}_{i_1 \cdots i_k}$$

où $(-1)^?$ est le signe de la permutation :

$$X_1 \cdots X_k \int_X \partial_{\beta_k} dx^{i_k} \cdots \partial_{\beta_1} dx^{i_1} \rightarrow \int_X \partial_{\beta_1}(\iota(X_1) dx^{i_1}) \cdots \partial_{\beta_k}(\iota(X_k) dx^{i_k})$$

où $| \int_X |$ est la parité de la dimension impaire de X.

Et enfin, puisque d_X^J est $\mathcal{D}_X$-linéaire à gauche et donc $(d_X^J)^{op}$ est $\mathcal{D}_X$-linéaire à droite, l'espace des formes est muni d'une structure de dg-module.

Proposition 2.38. — *Soit* ω *une* k*-forme et* $X_0, \cdots, X_k$ $k+1$*-champs de vecteurs. On a :*

$$(-1)^k \iota(X_0, \cdots, X_k) d_X^J \omega = \sum_i (-1)^{i + \sum_{k<i} X_i . X_k} X_i . (\iota(X_0, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots X_k)\omega +$$

$$\sum_{i<j} (-1)^{j + \sum_{i<k<j} X_k . X_j} \iota(X_0, , X_{i-1}, [X_i, X_j], X_{i+1}, \cdots, \widehat{X_j}, \cdots X_k)\omega$$

Démonstration. — Cela provient de la formule identique pour d_X et par unicité de d_X^j. □

CHAPITRE 3

STRUCTURES SYMPLECTIQUES SUR L'ESPACE DES $\mathbb{S}^{1|1}$SUPERLACETS

A partir de maintenant, on appelle superlacets les $\mathbb{S}^{1|1}$superlacets. Dans ce chapitre, nous allons établir une classification des formes symplectiques locales sur les espaces de superlacets similaire à celle de [**Mok98b**]. Dans la suite, on se réfèrera au terme classique pour désigner les résultats dans le cas des lacets non super. En un sens, la classification des formes symplectiques locales sur SLM est une "généralisation" des résultats classiques, cf remarque 3.1.2. En effet, si l'on considère des superlacets dans une variété classique et des formes qui ne dépendent pas des variables impaires, on peut retrouver les formes de Mokhov.

En premier lieu, la "généralisation" d'une forme d'ordre k sur l'espace des lacets devrait alors correspondre à une forme d'ordre $2k$ sur l'espace des superlacets puisque la dérivation D_x le long du supercercle est ici remplacée par la dérivation D_c impaire telle que $D_c^2 = D_x$. L'on verra cependant que grâce à l'intégrale de Berezin, il sera difficile de vraiment déterminer qui des formes d'ordre $2k-1$ ou $2k$ peuvent être considérées comme une "généralisation" du cas classique d'ordre k, le terme en lui même n'étant pas tout à fait adéquat. Il sera plus juste de dire que l'on retrouve les formes symplectiques classiques ou qu'elles apparaissent plutôt qu'on ne les généralise.

3.1. Cas général

Comme dans le cas classique, une forme symplectique sur l'espace des superlacets SLM ne sera pas une vraie forme symplectique qui induit un isomorphisme entre le fibré tangent et le cotangent. Celle-ci sera simplement présymplectique sur SLM ou dans le meilleur des cas faiblement symplectique, voire la remarque 6.

3.1.1. Notations. —

Le supercercle est engendré localement par deux variables. La variable paire x sur le cercle $\mathbb{S}^1$ et la variable impaire θ. Ainsi, $D_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est engendré par les opérateurs ∂_x et ∂_θ. Cependant, on peut remarquer que l'opérateur $\partial_c = \theta\partial_x + \partial_\theta$ vérifie :

$$\partial_c^2 = \partial_x$$

Et ainsi, on a:

Proposition 3.1. — *L'algèbre d'opérateurs $D_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est une $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}}$-algèbre engendrée par l'opérateur*

$$D_c = \theta D_x + D_\theta$$

.

Comme dans le cas classique, on note $D_c^s(\cdot) = (\cdot)_{(s)}$ et dans un système de coordonnées locales (u^i), l'opérateur D_c s'écrit :

$$D_c = u^i_{(s+1)} \frac{\partial}{\partial u^i_{(s)}}$$

Dans le cas classique, l'on écrivait l'intégrale d'une fonction f sur $\mathbb{S}^1$ sous la forme $\int_{\mathbb{S}^1} f(x)dx$. Dans le cas super, afin de ne pas alourdir les notations, la forme volume sera directement intégrée au symbole $\int_{\mathbb{S}^{1|1}}$. Celle-ci est invariante par translation et vérifie $\int_{\mathbb{S}^{1|1}} \theta = 1$. Puisque la forme volume est de parité 1, on considère que le symbole $\int_{\mathbb{S}^{1|1}}$ est aussi de parité 1 et si un objet X traverse l'intégrale, on applique la règle de signe et l'on ajoute le signe $(-1)^X$ à l'expression.

On se place sur une supervariété M munie de systèmes de coordonnées locales (u^i).

Les fonctionnelles locales s'écrivent maintenant :

$$F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} f(x, \theta, u^i, u^i_{(1)}, \cdots, u^i_{(k)})$$

L'action d'un champs de vecteurs $X = X^i \partial_i$ sur une fonctionnelle locale sera de la forme :

$$X.F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X.(r+1)} X^i_{(r)} \frac{\partial f}{\partial u^i_{(r)}}$$

Par rapport au corollaire , on peut voir l'apparition d'un signe $(-1)^X$ supplémentaire dû à la traversée par X du symbole intégral $\int_{\mathbb{S}^{1|1}}$.

Comme dans le cas classique, on peut vérifier que cette action est bien indépendante du système de coordonnées.

On peut remarquer que D_c étant un opérateur impair, les formules habituelles de Leibniz, dérivation multiple d'un produit, doivent être adaptées. On pourrait introduire des coefficients binomiaux plus généraux. On préfèrera étudier le cas pair qui correspond à D_x déjà traité et en déduire le cas impair. Par exemple le lemme classique 1.5 s'écrit maintenant :

Lemme 3.2. —

$$\frac{\partial}{\partial u^i_{(r)}} \circ D_c^{2s} = \frac{\partial}{\partial u^i_{(r)}} \circ D_x^s = \sum_{k=0}^{s} C_s^k D_c^{2s-2k} \circ \frac{\partial}{\partial u^i_{(r-2k)}}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^i_{(r)}} \circ D_c^{2s+1} = (-1)^{i+r} \sum_{k=0}^{s} C_s^k D_c^{2s-2k+1} \circ \frac{\partial}{\partial u^i_{(r-2k)}} + \sum_{k=0}^{s} C_s^k D_c^{2s-2k} \circ \frac{\partial}{\partial u^i_{(r-2k-1)}}$$

Maintenant dans un autre système de coordonnées (v^j), les coordonnées des vecteurs se transforment de la manière suivante : $X'^j = X^i \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i}$. D'après le lemme 3.2, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u^i_{(r)}} = \frac{\partial v^j_{(s)}}{\partial u^i_{(r)}}\frac{\partial}{\partial v^j_{(s)}} = \sum_{k=0}^s C_s^k D_c^{2s-2k}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i_{(r-2k)}})\frac{\partial}{\partial v^j_{(2s)}}$$
$$+((-1)^{i+r}\sum_{k=0}^s C_s^k D_c^{2s+1-2k}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i_{(r-2k)}}) + \sum_{k=0}^s C_s^k D_c^{2s-2k}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i_{(r-2k-1)}}))\frac{\partial}{\partial v^j_{(2s+1)}}$$

Dans le cas pair, on a :

$$\frac{\partial}{\partial u^i_{(2r)}} = \sum_{s\geq r} C_s^r D_c^{2s-2r}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i})\frac{\partial}{\partial v^j_{(2s)}} + (-1)^i C_s^r D_c^{2s+1-2r}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i})\frac{\partial}{\partial v^j_{(2s+1)}}$$

et dans le cas impair :

$$\frac{\partial}{\partial u^i_{(2r+1)}} = \sum_{s\geq} C_s^r D_c^{2s-2r}(\frac{\partial v^j}{\partial u^i})\frac{\partial}{\partial v^j_{(2s+1)}}$$

On peut maintenant vérifier que l'action est bien indépendante choix du système de coordonnées de la variété.

$$\begin{aligned}
X.F &= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X.(r+1)} X'^j_{(r)} \frac{\partial f}{\partial u'^j_{(r)}} \\
&= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X.(r+1)} (D_c^r(X^i \frac{\partial u'^j}{\partial u^i}) \frac{\partial f}{\partial u'^j_{(r)}} \\
&= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \sum_{k=0}^r (-1)^X C_r^k X^i_{2k} D_c^{2r-2k}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2r)}} + \sum_{k=0}^r C_r^k X^i_{2k+1} D_c^{2r-2k}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2r+1)}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^r (-1)^{X^i} C_r^k X^i_{2k} D_c^{2r+1-2k}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2r+1)}} \\
&= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X X^i_{2r} \sum_{k\geq r} C_k^r (D_c^{2k-2r}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2k)}} + (-1)^{u^i} D_c^{2k+1-2r}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2k+1)}}) \\
&\quad X^i_{2r+1} \sum_{k\geq r} C_k^r D_c^{2k-2r}(\frac{\partial u'^j}{\partial u^i})\frac{\partial f}{\partial u'^j_{(2k+1)}} \\
&= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X.(s+1)} X^i_{(s)} \frac{\partial f}{\partial u^i_{(s)}}
\end{aligned}$$

Le crochet de deux champs de vecteurs X et Y s'écrit d'après la proposition 2.35 :

Proposition 3.3. —

$$[X,Y]^i = (-1)^{X.s} X^j_{(s)} \frac{\partial Y^i}{\partial u^j_{(s)}} - (-1)^{X.Y}(-1)^{Y.s} Y^j_{(s)} \frac{\partial X^i}{\partial u^j_{(s)}}$$

3.1.2. 2-Formes locales sur SLM. —

Définition 46. — *Soit M une supervariété et $k \in \mathbb{N}$. Une 2-forme locale d'ordre k sur l'espace des superlacets SLM s'écrit localement pour tout champs de vecteurs $X, Y \in TLM$:*

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+(i+j).s} X^j Y^i_{(s)} \omega^s_{ij}$$

telle que

(i) $\exists i, j,\ \omega^k_{ij} \neq 0$

(ii) $\omega^s_{ij} = 0 \quad \forall s < k$.

On l'écrit aussi, avec (u^i) un système de coordonnées locales sur M :

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (D^s_c \otimes du^i)(du^j)\omega^s_{ij}$$

Par simplicité, on supposera que les formes sont de parité bien définie, càd que $|\omega| = 1 + i + j + s + |\omega^s_{ij}|$ pour tous les indices i, j et s.

Les signes apparaissent simplement en appliquant la Règle des signes à la transformation suivante :

$$XY \int_{\mathbb{S}^{1|1}} D^s_c du^i du^j \to \int_{\mathbb{S}^{1|1}} X^j D^s_c(Y^i)$$

La condition d'antisymétrie s'écrit maintenant pour tous champs de vecteurs X et Y, $\iota(X,Y)\omega = (-1)^{X.Y}\iota(Y,X)\omega$, par la règle des signes. En coordonnées locales cela se traduit par :

Proposition 3.4. — *La 2-forme $\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (D^s_c \otimes du^i)(du^j)\omega^s_{ij}$ est antisymétrique ssi :*

$$\omega^{2s}_{ij} = -(-1)^{i.j} \sum_{k \geq s} (-1)^k C^s_k ((\omega^{2k}_{ji})_{(2k-2s)} - (-1)^{i+j}(\omega^{2k+1}_{ji})_{(2k+1-2s)})$$

$$\omega^{2s+1}_{ij} = (-1)^{i.j} \sum_{k \geq s} (-1)^k C^s_k (\omega^{2k+1}_{ji})_{(2k-2s)}$$

Démonstration. — Pour la démonstration, on utilisera un petit lemme où les formules d'intégration par partie sont adaptées à la dérivation impaire D_c. Comme précédemment, le cas pair est le cas classique et le cas impair en découle immédiatement.

Lemme 3.5. —

$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}} D^{2r}_c(X)Y = (-1)^r \int_{\mathbb{S}^{1|1}} X D^{2r}_c(Y)$$

$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}} D^{2r+1}_c(X)Y = -(-1)^r(-1)^{X^i} \int_{\mathbb{S}^{1|1}} X D^{2r+1}_c(Y)$$

Comme dans le cas classique, la condition d'antisymétrie découle simplement d'intégrations par parties multiples.

$$
\begin{aligned}
& \omega(Y,X) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{X^i.(j+s)+(i+j).s} Y^j X^i_{(s)} \omega^s_{ij} \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{X^j.(i+s)+Y^i.(X^j+s)+(i+j).s} X^j_{(s)} Y^i \omega^s_{ji} \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}((-1)^{X^j.i+Y^i.X^j} X^j_{(2s)} Y^i \omega^{2s}_{ji} + (-1)^{X^j.(i+1)+Y^i.(X^j+1)+i+j} X^j_{(2s+1)} Y^i \omega^{2s+1}_{ji}) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}((-1)^{X^j.i+Y^i.X^j+s} X^j D_c^{(2s)}(Y^i \omega^{2s}_{ji}) - (-1)^{X^j.i+Y^i.(X^j+1)+s+i+j} X^j D_c^{(2s+1)}(Y^i \omega^{2s+1}_{ji})) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{X.Y}((-1)^{Y^i.j+i.j+s} X^j D_c^{(2s)}(Y^i \omega^{2s}_{ji}) - (-1)^{Y^i.(j+1)+i.j+s+i+j} X^j D_c^{(2s+1)}(Y^i \omega^{2s+1}_{ji})) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{X.Y+Y^i.j+i.j} X^j((-1)^s \sum_{k=0}^{s} C^k_s Y^i_{(2k)} (\omega^{2s}_{ji})_{2s-2k} - \\
& (-1)^{Y^i+i+j}(-1)^s (\sum_{k=0}^{s} C^k_s Y^i_{(2k+1)} (\omega^{2s+1}_{ji})_{2s-2k} + (-1)^{Y^i} \sum_{k=0}^{s} C^k_s Y^i_{(2k)} (\omega^{2s+1}_{ji})_{2s+1-2k})) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{X.Y+Y^i.j+i.j} X^j (Y^i_{(2s)} \sum_{k\geq s} (-1)^k C^s_k ((\omega^{2k}_{ji})_{2k-2s} - (-1)^{i+j} (\omega^{2k+1}_{ji})_{2s+1-2k}) - \\
& (-1)^{Y^i+i+j} Y^i_{(2s+1)} \sum_{k\geq s} (-1)^k C^s_k (\omega^{2k+1}_{ji})_{2k-2s})
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 3.6. — *Soit $s \in \mathbb{N}^*$.*

(i) *Si ω est une forme d'ordre $2s$, alors $\omega^{2s}_{ij} = (-1)^{s+1}(-1)^{i.j}\omega^{2s}_{ji}$ et $\omega^{2s-1}_{ij} = (-1)^s(-1)^{i.j}\omega^{2s-1}_{ji}$*

(ii) *Si ω est une forme d'ordre $2s+1$, alors $\omega^{2s+1}_{ij} = (-1)^s(-1)^{i.j}\omega^{2s+1}_{ji}$*

Comme dans le cas classique, on aura besoin d'identifier la nature géométrique des coefficients ω^s_{ij}. Dans un nouveau système de coordonnées locales (v^j) sur la supervariété les nouveaux coefficients ω'^s_{kl} vérifient :

Proposition 3.7. —

$$\omega'^{2s}_{kl} = (-1)^{(i+k).j} \frac{\partial u^j}{\partial v^l} \sum_{t\geq s} C^s_t ((\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)} \omega^{2t}_{ij} + (-1)^{k+j} (\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t+1-2s)} \omega^{2t+1}_{ij})$$

$$\omega'^{2s+1}_{kl} = (-1)^{(i+k).j} \frac{\partial u^j}{\partial v^l} \sum_{t\geq s} C^s_t (\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)} \omega^{2t+1}_{ij}$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
&\omega(X,Y)\\
= &\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+s.(j+i)}X^jY^i_{(s)}\omega^s_{ij}\\
= &\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+s.(i+j)}X'^l\frac{\partial u^j}{\partial v^l}(Y'^k\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(s)}\omega^s_{ij}\\
= &\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{(Y'^k+i+k).j}X'^l\frac{\partial u^j}{\partial v^l}(\sum_{t=0}^{s}C^t_sY'^k_{2t}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2s-2t)}\omega^{2s}_{ij}\\
&+(-1)^{(Y'^k+i+k)+i+j}(\sum_{t=0}^{s}C^t_sY'^k_{2t+1}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2s-2t)}\omega^{2s+1}_{ij}+(-1)^{Y'^k}\sum_{t=0}^{s}C^t_sY'^k_{2t}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2s+1-2t)}\omega^{2s}_{ij}))\\
= &\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{(Y'^k+i+k).j}X'^l\frac{\partial u^j}{\partial v^l}(Y'^k_{2s}\sum_{t\geq s}C^s_t((\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)}\omega^{2t}_{ij}+(-1)^{k+j}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t+1-2s)}\omega^{2t+1}_{ij})\\
&+(-1)^{Y'^k+k+j}Y'^k_{2s+1}\sum_{t\geq s}C^s_t(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)}\omega^{2t+1}_{ij})\\
= &\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{Y'^k.l}X'^lY'^k_{2s}(-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\sum_{t\geq s}C^s_t((\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)}\omega^{2t}_{ij}+(-1)^{k+j}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t+1-2s)}\omega^{2t+1}_{ij})\\
&+(-1)^{X+Y}(-1)^{Y'^k.(l+1)}X^j(-1)^{(i+k).j+k+l}Y'^k_{2s+1}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\sum_{t\geq s}C^s_t(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)}\omega^{2t+1}_{ij}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.8. — *Soit $s\in\mathbb{N}^*$.*

(i) *Si ω est une forme d'ordre $2s$, alors $\omega'^{2s}_{kl}=(-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^i}{\partial v^k}\omega^{2s}_{ij}$ et $\omega'^{2s-1}_{kl}=(-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^i}{\partial v^k}\omega^{2s-1}_{ij}$*

(ii) *Si ω est une forme d'ordre $2s+1$, alors $\omega'^{2s+1}_{kl}=(-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}\frac{\partial u^i}{\partial v^k}\omega^{2s+1}_{ij}$*

Remarque. — *On peut remarquer que le cas classique apparaît dans le cas super. En effet, on sait que $D_c^{2t}=D_x^t,\forall t\in\mathbb{N}$. Or si ω est une 2-forme d'ordre pair $2s$, on voit qu'il existe certaines formes dont les coefficients ω^{2s+1}_{ij} peuvent être tous nuls pour tout $s\in\mathbb{N}$. En effet, d'après les propositions 3.4 et 3.7 les coefficients d'exposants impairs ne dépendent pas des coefficients d'exposant pair. Ces formes s'expriment donc en terme de D_x seulement. Nous donnons des exemples lors de l'étude des formes symplectiques d'ordre 2.*

D'autre part, en combinant les deux derniers corollaires, on a :

Proposition 3.9. — *Soit M une supervariété et ω une forme symplectique d'ordre s sur SLM.*

(i) *Si les coefficients $\omega^s_{ij}=\omega^s_{ij}(u^k)$ dépendent seulement des variables locales u^k, alors*
   (a) *Si $s\equiv 1[4]$ ou $s\equiv 2[4]$, alors les ω^s_{ij} sont les coefficients d'une métrique Riemanienne sur M.*
   (b) *Si $s\equiv 3[4]$ ou $s\equiv 0[4]$, alors les ω^s_{ij} sont les coefficients d'une forme presque symplectique sur M.*

(ii) *Si s est pair et si les coefficients $\omega_{ij}^{s-1} = \omega_{ij}^{s-1}(u^k)$ dépendent seulement des variables locales u^k, alors*
   (a) *Si $s \equiv 2[4]$, les ω_{ij}^s sont les coefficients d'une forme presque symplectique sur M.*
   (b) *Si $s \equiv 0[4]$, les ω_{ij}^s sont les coefficients d'une métrique Riemanienne sur M.*

Démonstration. — On se reportera respectivement aux définitions 49 et 26 pour les définitions de métriques et formes symplectiques sur les supervariétés. □

A ce stade, il est important de mentionner l'intérêt du foncteur de points dans le cas super sans lequel les propositions précédentes seraient fausses. Dans le cas classique (càd non super), les résultats des démonstrations précédentes permettent de conclure sans ambiguïté sur la nature géométrique des coefficients car une fonction est complètement déterminée par ses valeurs. Or pour une fonction sur une supervariété, cela n'est pas suffisant. Le foncteur de points est justement ce qui permet de "remédier à ce problème".

En effet, dans les formules de la proposition 3.7, il est important de comprendre que ces égalités ne sont pas valables pour des sections du faisceaux $\mathcal{O}_M$ mais pour des sections d'autres faisceaux.

Par exemple, dans le cas où ces quantités ne seraient évaluées qu'en des morphismes de supervariétés $\gamma : \mathbb{S}^{1|1} \to M$, les égalités précédentes ne seraient valables qu'en tant que sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}}$. Si l'on notait $\mathcal{N}_M$ le faisceau des fonctions nilpotentes de $\mathcal{O}_M$, cela signifierait que ces égalités ne sont valables que dans $\mathcal{O}_M/\mathcal{N}_M^2$, ce qui n'est pas suffisant pour conclure sur la nature des coefficients.

Par contre, en termes de foncteur de points, elles sont vraies en tout S-point de SLM càd vraies de manière fonctorielle en tant que sections des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{S}^{1|1}\times S}$. En prenant des S-points bien choisis, on peut accéder à tous les termes nilpotents des coefficients et ainsi obtenir l'égalité en tant que sections de $\mathcal{O}_M$.

Ceci est ainsi un autre argument en faveur d'une description de l'espace des superlacets en tant que foncteur de points. Les résultats de classification feront intervenir les objets géométriques plutôt que leurs classes d'équivalence modulo $\mathcal{N}_M^2$. Dans la suite, on pourra ainsi interpréter directement les relations de changements de coordonnées comme des relations entre les coefficients d'objets géométriques de la supervariété M.

3.1.3. Formes symplectiques locales sur SLM : condition de fermeture. —

Définition 47. — *Soit M une supervariété et $k \in \mathbb{N}$. Soit ω, une 2-forme locale d'ordre k sur l'espace des superlacets SLM de la forme $\forall X, Y \in TLM$:*

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+(i+j).s} X^j Y^i_{(s)} \omega^s_{ij}$$

La forme ω est symplectique si ω^k_{ij} est inversible et si $d\omega = 0$.

Il nous reste à énoncer la condition de fermeture. Celle-ci s'écrit :

Proposition 3.10. — *Soit M une supervariété et $k \in \mathbb{N}$. Soit ω, une 2-forme locale d'ordre k sur l'espace des superlacets SLM de la forme $\forall X, Y \in TLM$:*

$$\omega(X,Y) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+s)+(i+j).s} X^j Y^i_{(s)} \omega^s_{ij}$$

La forme ω est fermée si pour tout champs de vecteurs Y et Z homogènes,

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{Z^i.(j+s)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k)+s.(i+j)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
&\quad -(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+s)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+1)+s.(i+j)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
&\quad -(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+s+r)}(-1)^{s.(i+j+k+r)}Y^j_{(r)}Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\
&\quad +(-1)^{Z.(k+j+r+s)+s.(j+k)}(-1)^{Y^j.(k+s)}Y^j_{(s)}Z^i_{(r)}\frac{\partial \omega^s_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}
\end{aligned}$$

Démonstration. — Dans le cas des deux formes, pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur LM la condition de fermeture s'écrit d'après 2.38 :

$$\begin{aligned}
\iota(X,Y,Z)d\omega &= X(\iota(Y,Z)\omega) - (-1)^{X.Y}Y(\iota(X,Z)\omega) + (-1)^{Z.(X+Y)}Z(\iota(X,Y)\omega) \\
&\quad -\iota([X,Y],Z)\omega + (-1)^{Y.Z}\iota([X,Z],Y)\omega + (-1)^{X.(Y+Z)}\iota([Y,Z],X)\omega
\end{aligned}$$

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned}
& X.(\iota(Y,Z)\omega) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{X.r}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}X^k_{(r)}\frac{\partial}{\partial u^k_{(r)}}(Y^j Z^i_{(s)}\omega^s_{ij}) \\
= & \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{X.r}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}X^k_{(r)}(\frac{\partial Y^j}{\partial u^k_{(r)}}Z^i_{(s)}\omega^s_{ij} + (-1)^{Y^j.(k+r)}Y^j\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}}\omega^s_{ij} \\
& +(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+r)}Y^j Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(r)}})
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
\iota([X,Y],Z)\omega = \textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}((-1)^{X.r}X^k_{(r)}\frac{\partial Y^j}{\partial u^k_{(r)}} \\
-(-1)^{X.Y}(-1)^{Y.r}Y^k_{(r)}\frac{\partial X^j}{\partial u^j_{(r)}})Z^i_{(s)}\omega^s_{ij}
\end{aligned}$$

Les termes $X^k_{(r)}\frac{\partial Y^j}{\partial u^k_{(r)}}Z^i_{(s)}$ se compensent bien dans les deux expressions. Quant aux termes en $X^k_{(r)}Y^j\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}}$, ceux-ci vont se simplifier avec l'expression :

$$\begin{aligned}
(-1)^{Y.X}\iota(Y,[X,Z])\omega &= \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{Y.X}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i+X.(j+s)+s.(i+j)}Y^j(\\
&\quad ((-1)^{X.r}X^k_{(r)}\frac{\partial Z^i}{\partial u^k_{(r)}})_{(s)}\omega^s_{ij} - (-1)^{X.Z}((-1)^{Z.r}Z^k_{(r)}\frac{\partial X^i}{\partial u^k_{(r)}})_{(s)}\omega^s_{ij})
\end{aligned}$$

En effet, d'après la démonstration du crochet de Lie, proposition 2.35, on a :

$$(-1)^{X.r}X^k_{(r)}\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}} = (-1)^{X.s}D^s_c((-1)^{X.r}X^k_{(r)}\frac{\partial Z^i}{\partial u^k_{(r)}})$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{Y.X}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i+X.(j+s)+s.(i+j)}Y^j(-1)^{X.r}(X^k_{(r)}\frac{\partial Z^i}{\partial u^k_{(r)}})_{(s)}\omega^s_{ij} \\
= \;& (-1)^{Y.X}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i.(j+s)+X.j+s.(i+j)}Y^j(-1)^{X.r}X^k_{(r)}\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}}\omega^s_{ij} \\
= \;& (-1)^{Y.X}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i.(j+s)+X.j+s.(i+j)}(-1)^{X.r+(X^k+r).Y^j}X^k_{(r)}Y^j\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}}\omega^s_{ij} \\
= \;& (-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{X.r+(k+r).Y^j}X^k_{(r)}Y^j\frac{\partial Z^i_{(s)}}{\partial u^k_{(r)}}\omega^s_{ij}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \iota(X,Y,Z)d\omega \\
= \;& \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{X.r}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+r)}X^k_{(r)}Y^jZ^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(r)}}) \\
& -(-1)^{X.Y}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Y.r}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(X^j+Z^i+s).(k+r)}Y^k_{(r)}X^jZ^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(r)}}) \\
& +(-1)^{Z.(X+Y)}(-1)^{X+Y+Z}(-1)^{Z.r}(-1)^{Y^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(X^j+Y^i+s).(k+r)}Z^k_{(r)}X^jY^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(r)}} \\
= \;& \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}((-1)^{X.r}(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+r)}X^k_{(r)}Y^jZ^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(r)}} \\
& -(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+s+r)}(-1)^{s.(j+r)+s.(i+k)}X^kY^j_{(r)}Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\
& +(-1)^{Z.(k+j+r+s)}(-1)^{Y^j.(k+s)+s.(j+k)}X^kY^j_{(s)}Z^i_{(r)}\frac{\partial \omega^s_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}) \\
= \;& \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+Z}X^k((-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k)}(-1)^rD^{2r}_c(Y^jZ^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+s)+s.(i+j)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+1)}(-1)^rD^{2r+1}_c(Y^jZ^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}})) \\
& -(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+s+r)}(-1)^{s.(i+j+k+r)}Y^j_{(r)}Z^i_{(s)}\frac{\partial \omega^s_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\
& +(-1)^{Z.(k+j+r+s)}(-1)^{Y^j.(k+s)+s.(j+k)}Y^j_{(s)}Z^i_{(r)}\frac{\partial \omega^s_{jk}}{\partial u^i_{(r)}})
\end{aligned}$$

Puisque ce résultat est valable pour tout champ de vecteur X, comme dans le cas classique, cela impose que :

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{Y+Z}((-1)^{Z^i.(j+s)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k)+s.(i+j)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i_{(s)} \frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\ & -(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+s)}(-1)^{(Y^j+Z^i+s).(k+1)+s.(i+j)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i_{(s)} \frac{\partial \omega^s_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}})) \\ & -(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+s+r)}(-1)^{s.(i+j+k+r)} Y^j_{(r)} Z^i_{(s)} \frac{\partial \omega^s_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\ & +(-1)^{Z.(k+j+r+s)+s.(j+k)}(-1)^{Y^j.(k+s)} Y^j_{(s)} Z^i_{(r)} \frac{\partial \omega^s_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}) \end{aligned}$$

En prenant des champs de vecteurs homogènes, on peut omettre le terme $(-1)^{Y+Z}$, d'où le résultat.

□

Dans la suite, comme dans le cas classique on étudie les formes symplectiques pour les premiers ordres $0, 1, 2$ et 3.

3.2. Formes locales d'ordre 0

3.2.1. Définition et propriétés. —

Définition 48. — *Soit M une supervariété. Une forme symplectique d'ordre* 0 *sur l'espace des superlacets SLM s'écrit localement pour tout champs de vecteurs $X, Y \in TLM$:*

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.j} X^j Y^i \omega_{ij}(x,\theta,u^i,\cdots,u^i_{(s)})$$

Du cas général, on déduit immédiatement les propriétés suivantes des coefficients ω_{ij}.

Proposition 3.11. — *Si ω est une forme symplectique d'ordre* 0*, alors*

(i) *Les coefficients ω_{ij} sont antisymétriques*

$$\omega_{ij} = -(-1)^{i.j}\omega_{ji}$$

(ii) *Dans un changement de variables, les coefficients ω_{ij} se transforment selon*

$$\omega'_{kl} = (-1)^{(i+k).j} \frac{\partial u^j}{\partial v^l} \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \omega_{ij}$$

Comme dans le cas classique la dépendance des coefficients ω_{ij} en les dérivées $u^i_{(s)}$ est limitée par la condition de fermeture. On a :

Proposition 3.12. — *Si ω est une forme symplectique d'ordre* 0*, alors*

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}(x,\theta,u^i,u^i_{(1)},u^i_{(2)})$$

Démonstration. — Dans le cas des formes d'ordre 0, la condition de fermeture s'écrit pour tous champs de vecteurs Y et Z :

(3.2.1)

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
& -(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+r)} Y^j_{(r)} Z^i \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\
& +(-1)^{Z.(k+j+r)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i_{(r)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) &= Y^j_{(2r)}(-1)^{k+r} C^r_{k+r}(Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2k+2r)}})_{2k} \\
&= Y^j_{(2r)}(-1)^{k+r+s} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k)}})_{2k}
\end{aligned}$$

et donc aussi :

$$\begin{aligned}
& (-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
= \quad & (-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r+1)} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k} \\
& +(-1)^{Y^j}(-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r)} Z^i_{(2s+1)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k} \\
& +(-1)^{Y^j+Z^i}(-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r)} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi le premier terme de l'équation 3.2.1, s'écrit :

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
= \; & (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).k}(-1)^{k+r+s}(Y^j_{(2r)} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k)}})_{2k}) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}((-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r+1)} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k} \\
& +(-1)^{Y^j}(-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r)} Z^i_{(2s+1)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k} \\
& +(-1)^{Y^j+Z^i}(-1)^{k+r+s} Y^j_{(2r)} Z^i_{(2s)} C^r_{k+r+s} C^s_{k+s}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2s+2r+2k+1)}})_{2k+1})
\end{aligned}
$$

Maintenant soit $t^1_k = max(\{r | \exists i, j, \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}} \neq 0\})$ et supposons que $t^1_k \neq 0$.

Regardons les coefficients des termes $Y^j_{2(t^1_k-1)+1} Z^i_{(2)}$. Comme $2(t^1_k-1)+1 \geq 3$, on a simplement à i et j fixé, modulo les signes, le terme $C^{t^1_k-1}_{t^1_k} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{2t^1_k+1}}$. Dans le cas d'une forme fermée ces coefficients doivent être nuls. Or d'après la définition de t^1_k il existe i et j tels que $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{2t^1_k+1}} \neq 0$ donc contradiction. Et ainsi, $t^1_k = 0$

Maintenant soit $t_k = max(\{r | \exists i, j, \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}} \neq 0\})$ et supposons que $t_k > 1$

Regardons maintenant les coefficients des termes $Y^j_{2(t_k-1)} Z^i_{(2)}$ dans 3.2.1.

On a simplement, modulo les signes, le terme $C^{t_k-1}_{t_k}(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2t_k)}})$ car d'après le résultat précédent le terme $(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2t_k+1)}})$ est nul! De même, on arrive à une contradiction et ainsi $t_k \leq 1$. □

On peut remarquer que le résultat est en un sens similaire à celui du cas classique puisque $u^k_{(2)} = D_x(u^k)$.

3.2.2. Classification des formes symplectiques locales d'ordre 0. —

Les trois termes de la condition de fermeture des formes symplectiques locales d'ordre 0 s'écrivent maintenant :

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}})\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}})\\
= \ &(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).k}(Y^j Z^i(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2})_{(2)}) - Y^j_{(2)} Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2} - Y^j Z^i_{(2)} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2)}})\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}(Y^j_{(1)} Z^i \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} + (-1)^{Y^j} Y^j Z^i_{(1)} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} + (-1)^{Y^j+Z^i} Y^j Z^i (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+r)} Y^j_{(r)} Z^i \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(r)}}\\
= \ &(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)} Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)} Y^j_{(1)} Z^i \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(1)}}\\
&+(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)} Y^j_{(2)} Z^i \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(2)}}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{Z.(k+j+r)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i_{(r)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}\\
= \ &(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i_{(1)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i_{(1)}}\\
&+(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i_{(2)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i_{(2)}}
\end{aligned}
$$

Proposition 3.13. — *Si ω est une forme symplectique d'ordre 0, alors*

$$
\begin{aligned}
\omega_{ij} = \omega''_{ij} + (-1)^{i+j} u^k_{(1)} \omega'_{ijk} - (-1)^k \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega'_{ijkl} - (-1)^{i+j+l} \frac{1}{6} u^k_{(1)} u^l_{(1)} u^m_{(1)} \omega'_{ijklm}\\
+ u^k_{(2)} \omega_{ijk} - (-1)^{i+j+k} u^k_{(2)} u^l_{(1)} \omega_{ijkl}
\end{aligned}
$$

avec les coefficients $\omega''_{ij}, \omega'_{ijk}, \omega'_{ijkl}$ et ω'_{ijklm} complètement antisymétriques.

Démonstration. — D'après l'équation de fermeture, les coefficients des termes $Y^j_{(s)} Z^i_{(t)}$ sont nuls. Par antisymétrie, à i, j, s et t fixés, les termes $Y^j_{(s)} Z^i_{(t)}$ et $Y^j_{(t)} Z^i_{(s)}$ donnent des équations équivalentes. On ne les fera donc pas figurer.

Les termes en $Y^j Z^i$ donnent :

$$
\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2})_{(2)} - (-1)^{j.k} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} - (-1)^k (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})_1 = 0 \tag{3.2.2}
$$

Les termes en $Y^j_{(1)} Z^i$ (ou en $Y^j Z^i_{(1)}$) donnent :

$$(-1)^k \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} + (-1)^{j.(k+1)} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(1)}} = 0 \tag{3.2.3}$$

Et enfin les termes en $Y^j_{(2)} Z^i$ (ou en $Y^j Z^i_{(2)}$) donnent :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2)}} + (-1)^{j.k} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j_{(2)}} = 0 \tag{3.2.4}$$

La relation 3.2.2 s'écrit aussi :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} = (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2})_{(2)} + (-1)^k (\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})_1$$

On peut expliciter les deux termes de droite :

$$(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2})_{(2)} = D_x(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_2}) = \partial_x(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(2)}}) + u^l_{(2)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l \partial u^k_{(2)}}) + u^l_{(3)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(2)}}) + u^l_{(4)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(2)} \partial u^k_{(2)}})$$

et

$$(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})_1 = \partial_c(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}) + u^l_{(1)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l \partial u^k_{(1)}}) + u^l_{(2)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(1)}}) + u^l_{(3)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(2)} \partial u^k_{(1)}})$$

Puisque les termes de gauche ne dépendent ni de $u^l_{(4)}$ ni de $u^l_{(3)}$, on a :

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(2)} \partial u^k_{(2)}} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(2)}} = -(-1)^k \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(2)} \partial u^k_{(1)}}$$

De la première, on déduit que ω_{ij} peut se mettre sous la forme :

$$\omega_{ij} = \omega'_{ij}(x, u, u_{(1)}) + (-1)^{k.(i+j)} u^k_{(2)} \tilde{\omega}_{kij}(x, u, u_{(1)})$$

En utilisant 3.2.4, on a : $(-1)^{k.(i+j)}\tilde{\omega}_{kij} + (-1)^{j.i}\tilde{\omega}_{jik} = 0$ et combinée avec la relation d'antisymmétrie, on a que $\tilde{\omega}_{ijk}$ est totalement antisymétrique!

Et ainsi :

$$\omega_{ij} = \tilde{\omega'}_{ij}(x, u, u_{(1)}) + u^k_{(2)} \tilde{\omega}_{ijk}(x, u, u_{(1)}) \tag{3.2.5}$$

Dans 3.2.2 il y a maintenant un unique terme quadratique en $u_{(2)}$ provenant de $u^l_{(2)}(\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(1)}})$. On en conclut que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_{ijk}}{\partial u^m_{(1)} \partial u^l_{(1)}} = 0$$

.

Et ainsi $\tilde{\omega}_{ijk} = \omega_{ijk}(x, u) + (-1)^{(l+1).(i+j+k)} u^l_{(1)} \omega_{lijk}(x, u)$.

De la deuxième, on déduit alors que

$$(-1)^{(l+1).(i+j+k)} \omega_{lijk} = (-1)^{(l+1).(k+1)} (-1)^{(k+1).(i+j+l)} \omega_{kijl}$$

Ou encore en utilisant la totale antisymétrie de $\tilde{\omega}_{ijk}$, on a : $\omega_{lkij} = -(-1)^{l.k} \omega_{klij}$

Et donc que finalement, ω_{lkij} est aussi totalement antisymétrique.

Et ainsi :

$$\tilde{\omega}_{ijk} = \omega_{ijk}(x,u) - (-1)^{i+j+k} u^l_{(1)} \omega_{ijkl}(x,u) \tag{3.2.6}$$

avec ω_{ijk} et ω_{ijkl} totalement antisymétriques.

Maintenant, toujours dans 3.2.2, on peut regarder les termes en $u^l_{(2)} u^m_{(1)}$, on a :

$$(-1)^{k.(l+m+1)+i+j+l} \frac{\partial \omega_{ijlm}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l+m+1)+i+k+l} \frac{\partial \omega_{iklm}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k+l+m+1)+j+k+l} \frac{\partial \omega_{jklm}}{\partial u^i} =$$
$$(-1)^{l.(m+1)+i+j+k} \frac{\partial \omega_{ijkm}}{\partial u^l} + (-1)^{i+j+k+l+k.l} \frac{\partial \omega_{ijlk}}{\partial u^m} + (-1)^k \frac{\partial^3 \tilde{\omega'}_{ij}}{\partial u^m_{(1)} \partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(1)}}$$

On peut alors remarquer que tous les termes sauf le dernier ne dépendent pas de $u_{(1)}$. On en conclut que

$$\frac{\partial^4 \tilde{\omega'}_{ij}}{\partial u^n_{(1)} \partial u^m_{(1)} \partial u^l_{(1)} \partial u^k_{(1)}} = 0$$

Et ainsi, on peut écrire :

$\tilde{\omega'}_{ij} = (-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)+(m+1).(i+j+k+l)} \frac{1}{6} u^k_{(1)} u^l_{(1)} u^m_{(1)} \omega'_{mlkij}(x,u)$ $+ \quad (-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega'_{lkij}(x,u) \quad + \quad u^k_{(1)} (-1)^{(k+1).(i+j)} \omega'_{kij}(x,u) \quad +$ $\omega''_{ij}(x,u)$

avec

– $(-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)} \omega'_{lkij} = (-1)^{(l+1).(k+1)} (-1)^{(l+1).(i+j)+(k+1).(i+j+l)} \omega'_{klij}$

càd

$$\omega'_{lkij} = -(-1)^{k.l} \omega'_{ijkl}$$

– $(-1)^{(k+1).(l+1)} (-1)^{(l+1).(i+j)+(k+1).(i+j+l)+(m+1).(i+j+k+l)} \omega'_{mklij}$
$= (-1)^{(m+1).(l+1)} (-1)^{(k+1).(i+j)+(m+1).(i+j+k)+(l+1).(i+j+k+m)} \omega'_{lmkij}$
$= (-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)+(m+1).(i+j+k+l)} \omega'_{mlkij}$

càd

$$\omega'_{mlkij} = -(-1)^{l.m} \omega'_{lmkij} = -(-1)^{k.l} \omega'_{mklij}$$

On peut ne pas imposer ces relations d'antisymétrie! Mais par symétrie des termes $u^k_{(1)} u^l_{(1)}$ et $u^k_{(1)} u^l_{(1)} u^m_{(1)}$ la contribution des termes ne vérifiant pas ces relations est nulle.

De plus la propriété d'antisymétrie donne

$$\omega'_{lkij} = -(-1)^{i.j} \omega'_{lkji}$$
$$\omega'_{mlkij} = -(-1)^{i.j} \omega'_{mlkji}$$
$$\omega'_{ijk} = -(-1)^{i.j} \omega'_{jik}$$

Maintenant la relation 3.2.3 implique que

$$(-1)^k (-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)+(m+1).(i+j+k+l)} \omega'_{mlkij}$$
$$= -(-1)^{j.(k+1)} (-1)^{(j+1).(i+k)+(l+1).(i+j+k)+(m+1).(i+j+k+l)} \omega'_{mljik}$$

$$(-1)^k(-1)^{(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)}\omega'_{lkij} = -(-1)^{j.(k+1)}(-1)^{(j+1).(i+k)+(l+1).(i+j+k)}\omega'_{ljik}$$

et

$$(-1)^k(-1)^{(k+1).(i+j)}\omega'_{kij} = -(-1)^{j.(k+1)}(-1)^{(j+1).(i+k)}\omega'_{jik}$$

autrement dit :

$$\omega'_{mlkij} = -(-1)^{j.(i+k)+i.k}\omega'_{mljik}$$

$$\omega'_{lkij} = -(-1)^{j.(i+k)+i.k}\omega'_{ljik}$$

$$\omega'_{kij} = -(-1)^{j.(i+k)+i.k}\omega'_{jik}$$

Et ainsi les quantitées ω'_{mlkij}, ω'_{lkij} et ω'_{kij} sont totalement antisymétriques et on a :

(3.2.7)
$$\tilde{\omega'}_{ij} = -(-1)^{i+j+l}\frac{1}{6}u^k_{(1)}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\omega'_{ijklm} - (-1)^k\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\omega'_{ijkl} + u^k_{(1)}(-1)^{i+j}\omega'_{ijk} + \omega''_{ij}$$

Et finalement, d'après 3.2.6 et 3.2.7 :

(3.2.8)
$$\omega_{ij} = \omega''_{ij} + (-1)^{i+j}u^k_{(1)}\omega'_{ijk} - (-1)^k\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\omega'_{ijkl} - (-1)^{i+j+l}\frac{1}{6}u^k_{(1)}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\omega'_{ijklm} + u^k_{(2)}\omega_{ijk} - (-1)^{i+j+k}u^k_{(2)}u^l_{(1)}\omega_{ijkl}$$

où tous les coefficients sont totalement antisymétriques.

□

Maintenant que tous les coefficients ne dépendent plus que de x, θ et u^i, on peut identifier leurs natures géométriques.

Remarque. — *Comme dans le cas classique, cf remarque 1.1.4, on préfèrera une interprétation en terme d'objets géométriques sur M paramétrés par $\mathbb{S}^{1|1}$ plutôt qu'une interprétation en terme d'objets géométriques sur $M \times \mathbb{S}^{1|1}$. Ainsi il sera équivalent de considérer des familles de formes différentielles $\Omega(x,\theta)$ sur M paramétrées par $\mathbb{S}^{1|1}$ que des formes différentielles sur $M \times \mathbb{S}^{1|1}$ telles que $\iota(\frac{\partial}{\partial x})\Omega = \iota(\frac{\partial}{\partial \theta})\Omega = 0$.*

Proposition 3.14. — *Si ω est une forme symplectique locale d'ordre 0, alors*
- (i) *Les coefficients ω''_{ij} sont les coefficients d'une famille Ω de 2-formes non dégénérées sur M paramétrée par $\mathbb{S}^{1|1}$.*
- (ii) *Les coefficients ω_{ijk} et ω'_{ijk} sont les coefficients de deux familles de 3-formes Λ et Λ' sur M paramétrée par $\mathbb{S}^{1|1}$.*
- (iii) *Les coefficients ω_{ijkl} et ω'_{ijkl} sont les coefficients de deux familles de 4-formes Ξ et Ξ' sur M paramétrée par $\mathbb{S}^{1|1}$.*
- (iv) *Les coefficients ω_{ijklm} sont les coefficients d'une famille de 5-formes Ψ sur M paramétrée par $\mathbb{S}^{1|1}$.*

Démonstration. — Tous les coefficients sont totalement antisymétriques. Il suffit de vérifier comment ils se transforment.

Soit (u'^j) un nouveau système de coordonnées sur M.

On a d'après le (ii) de la proposition 3.11 que

$$\omega_{ij} = (-1)^{(i+m).n} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \omega'_{mn}$$

De plus, $u'^o_{(1)} = u^k_{(1)} \frac{\partial u'^o}{\partial u^k}$ et $u'^o_{(2)} = u^k_{(2)} \frac{\partial u'^o}{\partial u^k}$.

Ainsi, on a :

$$\omega''_{ij} = (-1)^{(i+m).n} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} (\omega'')'_{mn}$$

$$\omega'_{kij} = (-1)^{(i+m).n+(m+n).(k+o)} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \frac{\partial u'^o}{\partial u^k} (\omega')'_{omn}$$

$$\omega_{kij} = (-1)^{(i+m).n+(m+n).(k+o)} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \frac{\partial u'^o}{\partial u^k} \omega'_{omn}$$

$$\omega_{lkij} = (-1)^{(i+m).n+(m+n).(k+o)+(m+n+o).(l+p)} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \frac{\partial u'^o}{\partial u^k} \frac{\partial u'^p}{\partial u'^l} \omega'_{pomn}$$

et

$$\omega'_{mlkij} = (-1)^{n.(i+o)+(n+o).(k+p)+(n+o+p).(k+q)+(n+o+p+q).(r+m)} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^o}{\partial u^i} \frac{\partial u'^p}{\partial u^k} \frac{\partial u'^q}{\partial u'^l} \frac{\partial u'^r}{\partial u'^m} \omega'_{rqnop}$$

Ce qui correspond bien aux transformations des coefficients de formes différentielles sur M d'après la proposition 1.37.

En un lacet constant, les coefficients ω_{ij} valent au signe près ω''_{ij}. La non-dégénérescence des premiers implique celle des seconds et ainsi les formes Ω sont bien non dégénérées. On dira aussi presque symplectiques (cf partie 3.5.1).

□

Dans le cas des formes symplectiques, ces formes différentielles sur M vérifient les conditions suivantes :

Proposition 3.15. — *Une* 2*-forme* ω *locale d'ordre* 0 *est une forme symplectique locale d'ordre* 0 *ssi*

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \Omega + \iota(\dot{\gamma})\Lambda' - \frac{1}{2}\iota(\dot{\gamma},\dot{\gamma})\Xi' - \frac{1}{6}\iota(\dot{\gamma},\dot{\gamma},\dot{\gamma})d\Xi + \iota(\ddot{\gamma})\Lambda - \iota(\ddot{\gamma},\dot{\gamma})\Xi$$

avec

(i)
$$\Xi' = \partial_c(\Xi) - d\Lambda$$

(ii)
$$d\Lambda' = \partial_x(\Xi) + \partial_c(\Xi')$$

(iii)
$$d\Omega = \partial_x(\Lambda) + \partial_c(\Lambda')$$

Démonstration. — Les coefficients ω_{ij} donnés par l'expression 3.2.8 vérifient les équations 3.2.3 et 3.2.4, ainsi que la condition d'antisymétrie. Les termes de l'équation 3.2.2 s'écrivent maintenant :

$$(\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial u_2^k})_{(2)} = D_x(\tilde{\omega}_{ijk}) = \partial_x(\omega_{ijk}) - (-1)^{i+j+k}u_{(1)}^l\partial_x(\omega_{ijkl}) + u_{(2)}^l(\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial u^l})$$
$$-(-1)^{i+j+k}u_{(2)}^m u_{(1)}^l(\frac{\partial\omega_{ijkl}}{\partial u^m}) - (-1)^{i+j+k}u_{(3)}^l\omega_{ijkl}$$

et

$$\begin{aligned}(\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial u_{(1)}^k})_1 &= D_c((-1)^{i+j}\omega'_{ijk} - (-1)^k u_{(1)}^l\omega'_{ijkl} - (-1)^{i+j+l}\frac{1}{2}u_{(1)}^l u_{(1)}^m\omega'_{ijklm} + (-1)^{i+j}u_{(2)}^l\omega_{ijkl})\\
&= (-1)^{i+j}\partial_c(\omega'_{ijk}) + u_{(1)}^l((-1)^{k+l+1}\partial_c(\omega'_{ijkl}) + (-1)^{i+j}\frac{\partial\omega'_{ijk}}{\partial u^l})\\
&\quad +u_{(1)}^l u_{(1)}^m(-(-1)^{i+j+m}\frac{1}{2}\partial_c(\omega'_{ijklm}) + (-1)^{k+l}\frac{\partial\omega'_{ijkl}}{\partial u^m}) - (-1)^{i+j+m}\frac{1}{2}u_{(1)}^l u_{(1)}^m u_{(1)}^n\frac{\partial\omega'_{ijklm}}{\partial u^n}\\
&\quad +u_{(2)}^l((-1)^{i+j+l}\partial_c(\omega_{ijkl}) - (-1)^k\omega'_{ijkl}) + u_{(2)}^l u_{(1)}^m((-1)^{i+j+l}\frac{\partial\omega_{ijkl}}{\partial u^m} - (-1)^{i+j+l}\omega'_{ijklm})\\
&\quad +(-1)^{i+j}u_{(3)}^l\omega_{ijkl}\end{aligned}$$

L'équation 3.2.2 est polynomiale en les $u_{(s)}^i$, en identifiant les puissances, on obtient les équations suivantes.

Les termes en $u_{(3)}^l$ donnent :

$$\omega_{ijkl} = \omega_{ijkl}$$

Les termes en $u_{(2)}^l u_{(1)}^m$ donnent :

$$(-1)^{k.(l+m+1)+i+j+l}\frac{\partial\omega_{ijlm}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l+m+1)+i+k+l}\frac{\partial\omega_{iklm}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k+l+m+1)+j+k+l}\frac{\partial\omega_{jklm}}{\partial u^i} = (-1)^{l.(m+1)+i+j+k}\frac{\partial\omega_{ijkm}}{\partial u^l} - (-1)^{i+j+k+l}\frac{\partial\omega_{ijkl}}{\partial u^m} + (-1)^{i+j+k+l}\omega'_{ijklm}$$

et en simplifiant, on a :

$$(-1)^{k.(l+m)}\frac{\partial\omega_{ijlm}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l+m)}\frac{\partial\omega_{iklm}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k+l+m)}\frac{\partial\omega_{jklm}}{\partial u^i} - (-1)^{l.m}\frac{\partial\omega_{ijkm}}{\partial u^l} + \frac{\partial\omega_{ijkl}}{\partial u^m} = \omega'_{ijklm}$$

càd

$$\Psi = d\Xi$$

Les termes en $u_{(2)}^l$ donnent :

$$(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\omega_{ikl}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j+l)}\frac{\partial\omega_{jkl}}{\partial u^i} = \frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial u^l} + (-1)^k((-1)^{i+j+l}\partial_c(\omega_{ijkl}) - (-1)^k\omega'_{ijkl})$$

ou encore :

$$(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega_{ijl}}{\partial u^k}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\omega_{ikl}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j+l)}\frac{\partial\omega_{jkl}}{\partial u^i}-\frac{\partial\omega_{ijk}}{\partial u^l}=(-1)^{i+j+l+k}\partial_c(\omega_{ijkl})-\omega'_{ijkl}$$

càd

$$d\Lambda=\partial_c(\Xi)-(\Xi')$$

On peut remarquer que :

$$(-1)^{i+j+m}\frac{1}{2}u^l_{(1)}u^m_{(1)}u^n_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijklm}}{\partial u^n}=\frac{1}{6}((-1)^{i+j+m}u^l_{(1)}u^m_{(1)}u^n_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijklm}}{\partial u^n}+(-1)^{i+j+n}u^m_{(1)}u^n_{(1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijkmn}}{\partial u^l}+(-1)^{i+j+n}u^l_{(1)}u^n_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijkln}}{\partial u^m})=\frac{1}{6}(-1)^{i+j+m}u^l_{(1)}u^m_{(1)}u^n_{(1)}(\frac{\partial\omega'_{ijklm}}{\partial u^n}+(-1)^{l.(m+n)}\frac{\partial\omega'_{ijkml}}{\partial u^l}-(-1)^{n.m}\frac{\partial\omega'_{ijkln}}{\partial u^m})$$

Et ainsi les termes en $u^k_{(1)}u^l_{(1)}u^m_{(1)}$ donnent :

$$(-1)^{k(l+m+n)}\frac{\partial\omega'_{ijlmn}}{\partial u^k}-(-1)^{j.(k+l+m+n)}\frac{\partial\omega'_{iklmn}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j+l+m+n)}\frac{\partial\omega'_{jklmn}}{\partial u^i}=(-1)^{l+m}((-1)^{l.(m+n)}\frac{\partial\omega'_{ijkmn}}{\partial u^l}-(-1)^{m.n}\frac{\partial\omega'_{ijkln}}{\partial u^m}+\frac{\partial\omega'_{ijklm}}{\partial u^n})$$

càd

$$d\Psi=0$$

ce qui découle déjà de $\Psi=d\Xi$.

De même, on peut remarquer que :

$$(-1)^{k+l}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijkl}}{\partial u^m}=\frac{1}{2}((-1)^{k+l}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijkl}}{\partial u^m}-(-1)^{k+m+l.m}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\partial\omega'_{ijkm}}{\partial u^l})$$

Et ainsi les termes en $u^l_{(1)}u^m_{(1)}$ donnent :

$$(-1)^{i+j+k+l+m}\partial_c(\omega'_{ijklm})=(-1)^{k.(l+m)}\frac{\partial\omega'_{ijlm}}{\partial u^k}-(-1)^{j.(k+l+m)}\frac{\partial\omega'_{iklm}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j+l+m)}\frac{\partial\omega'_{jklm}}{\partial u^i}-(-1)^{l.m}\frac{\partial\omega'_{ijkm}}{\partial u^l}+\frac{\partial\omega'_{ijkl}}{\partial u^m}$$

càd

$$d\Xi'=\partial_c(\Psi)$$

Les termes en $u^l_{(1)}$ donnent :

$$(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega'_{ijl}}{\partial u^k}-(-1)^{j.(l+k)}\frac{\partial\omega'_{ikl}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(l+k+j)}\frac{\partial\omega'_{jkl}}{\partial u^i}-\frac{\partial\omega'_{ijk}}{\partial u^l}=\partial_x(\omega_{ijkl})+(-1)^{i+j+k+l}\partial_c(\omega'_{ijkl})$$

càd

$$d\Lambda'=\partial_x(\Xi)+\partial_c(\Xi')$$

Et enfin les termes restant donnent :

$$\frac{\partial\omega''_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega''_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega''_{jk}}{\partial u^i} = \partial_x(\omega_{ijk}) + (-1)^{i+j+k}\partial_c(\omega'_{ijk})$$

càd

$$d\Omega = \partial_x(\Lambda) + \partial_c(\Lambda')$$

□

On peut aussi remarquer que :

$$\partial_c(\frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)\Xi) - \frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)d\Lambda = \frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)\Xi' + \iota(\ddot\gamma,\dot\gamma)\Xi$$

et que toute forme d'ordre 0 peut s'écrire :

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \Omega + \iota(\dot\gamma)\Lambda' + \frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)d\Lambda - \frac{1}{2}\partial_c(\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)\Xi) - \frac{1}{6}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma,\dot\gamma)d\Xi + \iota(\ddot\gamma)\Lambda$$

avec

(i)

$$d\Lambda' = 2\partial_x(\Xi) - \partial_c(d\Lambda)$$

(ii)

$$d\Omega = \partial_x(\Lambda) + \partial_c(\Lambda')$$

On en déduit alors, à l'aide de la proposition 3.14, le théorème suivant :

Théorème 3.16. — *Les formes symplectiques locales d'ordre* 0 *sont en bijection avec les quintuplets* $(\Omega, \Lambda, \lambda, \xi_0, \xi_1)$ *tels que*

(i) $\Omega(x,\theta)$ *est une famille de* 2*-formes presque symplectiques sur* M *paramétrée par* $\mathbb{S}^{1|1}$.

(ii) $\Lambda(x,\theta)$ *est une famille de* 3*-formes sur* M *paramétrée par* $\mathbb{S}^{1|1}$

(iii) λ *est une* 3*-formes sur* M.

(iv) ξ_0 *et* ξ_1 *sont des* 4*-formes sur* M

La bijection est donnée par :
En tout lacet $\gamma \in SLM$,

$$\omega_\gamma = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \Omega + \iota(\dot\gamma)\Lambda' + \frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)d\Lambda - \frac{1}{2}\partial_c(\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)\Xi) - \frac{1}{6}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma,\dot\gamma)d\Xi + \iota(\ddot\gamma)\Lambda$$

avec

$$\Lambda' = \lambda + \int_0^x \partial_\theta((d\Omega - \partial_x(\Lambda)))(t)dt + \theta(d\Omega - \partial_x(\Lambda))$$

et

$$\Xi = \xi_0 + \theta\xi_1 + \frac{1}{2}\int_0^x (d\Lambda' + \partial_c(d\Lambda))(t)dt$$

Démonstration. — Il suffit de savoir résoudre l'équation $\partial_c f = g$ avec f et g deux fonctions sur $\mathbb{S}^{1|1}$.
En découpant en parties paires et impaires, $f = f_0 + \theta f_1$ et $g = g_0 + \theta g_1$, on a alors

$$\partial_x f_0 = g_1$$

$$f_1 = g_0$$

on en conclut que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \partial_\theta(g)(t)dt + \theta g$$

.

Et ainsi, puisque $d\Lambda' = 2\partial_x(\Xi) - \partial_c(d\Lambda)$ càd $\partial_c(d\Lambda) = 2\partial_x(\Xi) - d\Lambda'$il existe une 3-forme sur M telle que $\Lambda' = \lambda + \int_0^x \partial_\theta((d\Omega - \partial_x(\Lambda)))(t)dt + \theta(d\Omega - \partial_x(\Lambda))$. On procède de même pour Ξ.

□

Corollaire 3.17. — *Les formes symplectiques ω d'ordre 0 dont les coefficients ω_{ij} ne dépendent pas explicitement de x et de θ sont en bijection avec les quadruplets $(\Omega, \Lambda, \Lambda', \Xi)$ avec*

(i) Ω *une forme symplectique sur M*

(ii) Λ' *une trois forme fermée sur M.*

(iii) Λ *et Ξ respectivement des 3 et 4-formes sur M.*

La bijection est donnée par :

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \Omega + \iota(\dot\gamma)\Lambda' + \frac{1}{2}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma)d\Lambda - \frac{1}{6}\iota(\dot\gamma,\dot\gamma,\dot\gamma)d\Xi + \iota(\ddot\gamma)\Lambda - \iota(\ddot\gamma,\dot\gamma)\Xi$$

3.3. Formes locales d'ordre 1

Dans cette section, l'on classifie, comme dans le cas classique, les formes locales homogènes d'ordre 1. Bien que celles-ci ne soient pas supposées "généraliser" le premier ordre classique puisque D_c est une "racine carré" impaire de D_x, on obtient un résultat de classification similaire, à savoir que les formes sont classifiées par une métrique Riemanienne et une connexion sur la supervariété M. Ceci est dû notamment à l'intégrale de Berezin. En effet, cette opération est une opération impaire qui en un sens compense la partie en θ de $D_c = \theta D_x + D_\theta$ pour au final ne garder que du D_x sur $\mathbb{S}^1$. Ceci permet ainsi de retrouver l'ordre 1 classique sur la partie paire de la supervariété M.

Afin de fixer les notations, cette section s'ouvre sur un très bref rappel des éléments de géométrie Riemanienne qui nous sont nécéssaires.

3.3.1. Métriques Riemaniennes et connexions compatibles sur les supervariétés. —

Dans ce paragraphe, l'on introduit rapidement les notions de super-géométrie Riemanienne (cf **[Goe08]**, **[DEF+99]**) dont nous aurons besoin dans cette sous-partie. Les notations diffèrent de celles des références citées. Elles semblent être propre à cette thèse du fait d'avoir choisi les notations de Tuynman **[Tuy10]** ce qui justifie leur rappel.

Définition 49. — *Soit M une supervariété. Une métrique riemanienne est un champ de 2-tenseurs covariants symétriques $g^{ij} = (-1)^{i.j} g_{ji}$ et non dégénérés.*

Si (u^i) est un système de coordonnées locales sur M alors :

$$g = \frac{1}{2} du^j du^i g_{ji}$$

et la propriété de symétrie se traduit par :

$$g_{ij} = (-1)^{i.j} g_{ji}$$

Afin de simplifier l'on considère des métriques pures, soit paires soit impaires.
La propriété de non-dégénérescence permet de définir un isomorphisme de superfibrés

$$\begin{array}{rccc} g^\sharp & : & TM & \to & T^*M \\ & & X & \mapsto & (-1)^{X^j.i+g.X} du^i X^j g_{ji} \end{array}$$

L'application inverse à gauche $g^\natural : T^*M \to TM$ est définie de manière naturelle par un tenseur covariant symétrique $\frac{1}{2} g^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ tel que

$$\begin{array}{rccc} g^\natural & : & T^*M & \to & TM \\ & & \alpha & \mapsto & (-1)^{\alpha^j.i} g^{ij} \alpha^j \partial_i \end{array}$$

Proposition 3.18. — *En coordonnées, la relation d'inversibilité s'écrit :*

$$(-1)^{j.(i+k)} g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$$

Démonstration. — On cherche la relation d'inversibilité qui lie ces deux champs de tenseurs. En composant les deux applications, on veut retrouver l'identité ce qui s'écrit pour tout champs de vecteur $X \in TM$:

$X = g^\natural \circ g^\sharp(X) = (-1)^{(X^i+g_{ik}).j+X^i.k+g.X} g^{jk} X^i g_{ik} \partial_j = (-1)^{g_{ik}.j+g.i} X^i g^{jk} g_{ik} \partial_j = (-1)^{(i+k).j+g.(i+j)} X^i g^{jk} g_{ik} \partial_j$
ce qui implique

$$(-1)^{(i+k).j+g.(i+j)} g^{jk} g_{ik} = \delta_i^j$$

qui est équivalent au résultat.

□

On peut remarquer que $g^\natural$ est seulement un inverse à droite au signe près : dans le cas pair c'est bien un inverse à droite mais dans le cas impair c'est $-g^\natural$ qui est un inverse à droite (ce qui est naturel par la règle des signes).
En effet, soit une 1-forme $\alpha \in T^*M$, on a :
$g^\sharp \circ g^\natural(\alpha) = (-1)^{\alpha^j.k} (-1)^{(g^{kj}+\alpha^j).i+g.(g+\alpha)} du^i g^{kj} \alpha^j g_{ki} = (-1)^{(g^{kj}).i+g.(g+j)} du^i g^{kj} g_{ki} \alpha^j = (-1)^{(g^{kj}).i+g.(g+j)+i.k+k.j)} du^i g^{jk} g_{ik} \alpha^j = (-1)^{g.(g+j+i)+(i+k).j)} du^i g^{jk} g_{ik} \alpha^j = (-1)^g \alpha$

On peut aussi vérifier les signes par changement de variables.
$g_{ij} = (-1)^{(i+m).n} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} g'_{mn}$
et
$g^{kj} = (-1)^{(o+j).k} g'^{lo} \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^o}$
et ainsi :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{k.(i+j)} g^{kj} g_{ij} \\
= \; & (-1)^{k.(i+j)}(-1)^{(i+m).n}(-1)^{(o+j).k} g'^{lo} \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} \frac{\partial u^j}{\partial u'^o} \frac{\partial u'^n}{\partial u^j} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} g'_{mn} \\
= \; & (-1)^{k.i}(-1)^{(i+m).o}(-1)^{o.k} g'^{lo} \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} g'_{mo} \\
= \; & (-1)^{k.i}(-1)^{(i+k+m).o}(-1)^{(m+o+g).(k+l+m+i)} g'^{lo} g'_{mo} \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \\
= \; & (-1)^{k.i}(-1)^{m.(k+m+i)+g.(k+l+m+i)}(-1)^{l.(o+m)} g'^{lo} g'_{mo} \frac{\partial u^k}{\partial u'^l} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \\
= \; & (-1)^{k.i}(-1)^{m.(k+m+i)+g.(k+i)} \frac{\partial u^k}{\partial u'^m} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \\
= \; & (-1)^{k.i}(-1)^{m.(k+m+i)+(m+i).(k+m)+g.(k+i)} \frac{\partial u'^m}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial u'^m} \\
= \; & (-1)^{g.(k+i)} \delta_i^k \\
= \; & \delta_i^k
\end{aligned}$$

Définition 50. — *Une connexion sur un faisceau $\mathcal{E}$ localement libre de $C^\infty(M)$ modules est un morphisme pair $\nabla : \mathcal{E} \to \Omega^1_M \otimes \mathcal{E}$ de faisceaux de super-espaces tel que*

$$\forall f \in C^\infty(M), \forall v \in \Gamma_M(E), \quad \nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla(v)$$

On peut maintenant définir, pour chaque $X \in TM$ la dérivée covariante dans la direction X.

On peut ainsi définir

$$\nabla_X(v) = \iota(X)\nabla(v)$$

La dérivée covariante est une dérivation de E de même parité que X. Elle vérifie alors les équations suivantes :

$$\nabla_{fX}(v) = \iota(fX)\nabla(v) = f\nabla_X(v)$$

et

$$\nabla_X(fv) = \iota(X)(df \otimes v + f\nabla(v)) = X(f)v + (-1)^{X.f} f\nabla_X(v)$$

Comme dans le cas classique, on peut définir les coefficients de Cristoffel de la connexion.

Définition 51. — *Soit (u^i) un système de coordonnées locales sur M alors les coefficients de Christoffel sont définis par :*

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma^k_{ji}\partial_k$$

Remarque. — *On aurait pu aussi définir les coefficients de Christoffel par $\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = (-1)^{i.j}\Gamma^k_{ij}\partial_k$ qui coïncident avec ceux de la définition classique (cf* **[DC92]** *et* **[Lic50]***).*

Dans un changement de variables, on a :

$$\begin{aligned}
&(3.3.1) && \Gamma'^{o}_{mn}\partial'^{o} = \iota(\partial u'^{n})\nabla(\partial u'^{m}) \\
&(3.3.2) && = \iota(\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\partial u^j)\nabla(\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\partial u^i) \\
&(3.3.3) && = \frac{\partial^2 u^s}{\partial u'^n \partial u'^m}\partial u^s + (-1)^{j.(i+n)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\iota(\partial u^j)\nabla(\partial u^i) \\
&(3.3.4) && = \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^n \partial u'^m}\partial u^j + (-1)^{j.(i+n)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^k_{ij}\partial_k \\
&(3.3.5) &&
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\Gamma'^{o}_{mn} = \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^o}{\partial u^j} + (-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial u'^o}{\partial u^k} \tag{3.3.6}$$

On peut définir les coefficients de Christoffel covariants par

$$\Gamma_{ijk} = (-1)^{(i+j+l).k}\Gamma^l_{ij}g_{lk}$$

autrement dit les coefficients de Christoffel covariants sont les coefficients de la 1-forme $(-1)^{i.j}\iota(\nabla_{\partial_i}(\partial_j))g = du^k\Gamma_{ijk}$.

Remarque. — *On retrouve alors les coefficients de Christoffel par la formule :*

$$\Gamma^m_{ij} = (-1)^{(i+j+k).m+g.(i+j+m)}g^{mk}\Gamma_{ijk}$$

En effet, $(-1)^{(i+j+k).m+g.(i+j+m)}g^{mk}\Gamma_{ijk} = (-1)^{(i+j+l).k}(-1)^{(i+j+k).m+g.(i+j+m)}g^{mk}\Gamma^l_{ij}g_{lk} = (-1)^{(k+l).m+g.(m+l)}\Gamma^l_{ij}g^{mk}g_{lk} = \Gamma^m_{ij}$.

Quant aux formules de transformation des coefficients covariants, on a :

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_{mno} = (-1)^{(p+m+n).o}\Gamma'^{p}_{mn}g'_{po} \\
&= (-1)^{(p+m+n).o}((-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^k} + \frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^j})(-1)^{(p+q).r}\frac{\partial u^r}{\partial u'^o}\frac{\partial u^q}{\partial u'^p}g_{qr} \\
&= (-1)^{(m+n+q).o}((-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^q_{ij}\frac{\partial u^r}{\partial u'^o}g_{qr} + \frac{\partial^2 u^q}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^r}{\partial u'^o}g_{qr}) \\
&= (-1)^{(m+n+q).o+(r+o).(q+i+j)}(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\frac{\partial u^r}{\partial u'^o}\Gamma^q_{ij}g_{qr} + (-1)^{(m+n+q).o}\frac{\partial^2 u^q}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^r}{\partial u'^o}g_{qr} \\
&= (-1)^{k.(i+j+m+n)+j.(i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma_{ijk} + (-1)^{(m+n+i).o}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^j}{\partial u'^o}g_{ij}
\end{aligned}$$

Autrement dit :

(3.3.7)

$$\Gamma'_{mno} = (-1)^{k.(i+j+m+n)+j.(i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma_{ijk} + (-1)^{(m+n+i).o}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^j}{\partial u'^o}g_{ij}$$

On considère maintenant des connexions ∇ sur M càd sur TM.

Définition 52. — *La torsion T de la connexion ∇ est le champ de tenseurs dans $\Omega(M)^2 \otimes TM$:*

$$\iota(X)\iota(Y)T = \nabla_X(Y) - (-1)^{X.Y}\nabla_Y(X) - [X, Y]$$

Proposition 3.19. — *En coordonnées locales, on a :*

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - (-1)^{i.j}\Gamma_{ji}^k$$

Démonstration. —
On a : $\iota(X)\iota(X)T = (-1)^{Y^i.j}X^jY^iT_{ij}^k\partial_k$
Et ainsi $T_{ij}^k = \iota(\partial_j)\iota(\partial_i)T = \nabla_{\partial u^j}(\partial u^i) - (-1)^{i.j}\nabla_{\partial u^i}(\partial u^j)$

□

D'après la formule de changement de variables 3.3.6, on voit que les coefficients T_{ij}^k se transforment bien comme des éléments de $\Omega(M)^2 \otimes TM$.

A l'aide de la métrique, on peut aussi définir les composantes covariantes du tenseur de torsion de la connexion par $T_{ijk} = (-1)^{(i+j+l).k}T_{ij}^l g_{lk}$ et d'après la proposition précédente :

Corollaire 3.20. —

$$T_{ijk} = \Gamma_{ijk} - (-1)^{i.j}\Gamma_{jik}$$

D'après la formule de changement de variables 3.5.1, on voit que les coefficients T_{ijk} se transforment bien comme les coefficients d'un 3-tenseur covariant sur M.

$$T_{ijk} = (-1)^{o.(i+j+m+n)+n.(m+i)}\frac{\partial u'^o}{\partial u^k}\frac{\partial u'^n}{\partial u^j}\frac{\partial u'^m}{\partial u^i}T'_{mno}$$

Maintenant, on cherche à déterminer les dérivées covariantes des formes différentielles. Pour cela, il suffit de définir les dérivées covariantes des 1-formes puis d'étendre par (super)dérivation à l'algèbre des formes.

Tout d'abord, on a : $\forall f \in C^\infty(M)$, $\nabla_k(f) = \partial_k(f)$.

Puis, localement, dans un système de coordoonnées (u^i) sur M, on a $0 = \nabla_k(\delta_j^i) = \nabla_k(\iota(\partial_j)du^i) = \Gamma_{jk}^i + (-1)^{j.k}\iota(\partial_j)\nabla_k(du^i)$ et ainsi

Proposition 3.21. —

$$\nabla_k(du^i) = -(-1)^{j.k}du^j\Gamma_{jk}^i$$

Définition 53. — *Soit M une supervariété munie d'une métrique g. Une connexion ∇ est dite compatible avec la métrique g si*

$$\forall X \in TM, \quad \nabla_X g = 0$$

Proposition 3.22. — *Une connexion ∇ est compatible avec la métrique g si pour tout système de coordonnées locales (u^i) sur M,*

$$\partial_k(g_{ij}) = (-1)^{j.k}\Gamma_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)}\Gamma_{jki}$$

Démonstration. — En coordonnées, on a :

$\nabla_k(du^i \otimes du^j g_{ij}) = 0$, $\forall k$ et ainsi :

$$\begin{aligned}
\nabla_k(du^i \otimes du^j g_{ij}) &= -(-1)^{l.k} du^l \Gamma^i_{lk} \otimes du^j g_{ij} - (-1)^{(i+l).k} du^i \otimes du^l \Gamma^j_{lk} g_{ij} \\
&\quad +(-1)^{k.(i+j)} du^i \otimes du^j \partial_k(g_{ij}) \\
&= -(-1)^{i.k+j.(i+k+l)} du^i \otimes du^j \Gamma^l_{ik} g_{lj} - (-1)^{(i+j).k} du^i \otimes du^j \Gamma^l_{jk} g_{il} \\
&\quad +(-1)^{k.(i+j)} du^i \otimes du^j \partial_k(g_{ij}) \\
&= du^i \otimes du^j (\partial_k(g_{ij}) - (-1)^{(i+k).j} \Gamma_{jki} - (-1)^{i.k} \Gamma_{ikj})
\end{aligned}$$

□

De la démonstration précédente, on conclut la relation :

$$(\nabla g)_{kij} = \partial_k(g_{ij}) - (-1)^{(i+k).j} \Gamma_{jki} - (-1)^{i.k} \Gamma_{ikj} \tag{3.3.8}$$

3.3.2. Formes locales d'ordre 1. —

Une 2-forme ω locale d'ordre 1 sur SLM s'écrit localement sous la forme :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y} (-1)^{Y^i.(j+1)+(i+j)} X^j Y^i_{(1)} \omega^1_{ij} + (-1)^{X+Y} (-1)^{Y^i.j} X^j Y^i \omega^0_{ij}$$

La condition d'antisymétrie s'écrit d'après 3.4 :

$$\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j} \omega^1_{ji}$$

$$\omega^0_{ij} = -(-1)^{i.j} (\omega^0_{ji} - (-1)^{i+j} (\omega^1_{ji})_{(1)})$$

Et la condition de fermeture :

$$
\begin{aligned}
0 &= (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
&-(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+r)}Y^j_{(r)}Z^i \frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} + (-1)^{Z.(k+j+r)}(-1)^{Y^j.k}Y^j Z^i_{(r)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(r)}} \\
&+(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k)}(-1)^r D_c^{2r}(Y^j Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}}) \\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k+1)}(-1)^r D_c^{2r+1}(Y^j Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}}) \\
&-(-1)^{Y.(k+r)}(-1)^{Z^i.(j+k+1+r)}(-1)^{(j+r)}Y^j_{(r)}Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j_{(r)}} \\
&+(-1)^{Z.(k+j+r+1)}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i_{(r)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i_{(r)}}
\end{aligned}
$$

Comme dans le cas classique, la dépendance en les dérivée $u^i_{(s)}$ des coefficients ω^t_{jk} est limitée.

Proposition 3.23. — *Si ω est une forme symplectique locale d'ordre 1 sur SLM alors :*

(i) *Les coefficients ω^1_{ij} dépendent au plus des dérivées d'ordre 3, càd*

$$\omega^1_{ij} = \omega^1_{ij}(x,\theta,u,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)})$$

(ii) *Les coefficients ω^0_{ij} dépendent au plus des dérivées d'ordre 4, càd*

$$\omega^0_{ij} = \omega^0_{ij}(x,\theta,u,u_{(1)},u_{(2)},u_{(3)},u_{(4)})$$

(iii) *De plus, les coefficients ω^0_{ij} sont au plus linéaires en $u_{(4)}$, càd*

$$\frac{\partial^2\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(4)}u^l_{(4)}} = 0$$

Démonstration. — On procède comme dans les démonstrations précédentes.

Soit $t^{11}_k = max(\{r|\exists i,j, \frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}} \neq 0\})$ et supposons que $t^{11}_k \geq 2$.

Regardons les coefficients des termes $Y^j_{2(t^{11}_k-1)+1}Z^i_{(3)}$ avec i,j les indices qui interviennent dans la définition de t^{11}_k.

Comme $t^{11}_k \geq 2$ on a simplement, modulo les signes, le terme $t^{11}_k\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{2t^{11}_k+1}}$. Dans le cas d'une forme fermée ce coefficient doit être nul. Or il ne l'est pas par définition donc contradiction. Donc $t^{11}_k \in \{0,1\}$

Maintenant, soit $t^{10}_k = max(\{r|\exists i,j, \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}} \neq 0\})$ et supposons que $t^{10}_k \geq 2$.

Regardons les coefficients des termes $Y^j_{2(t^{10}_k-1)+1}Z^i_{(2)}$ avec i,j les indices qui interviennent dans la définition de t^{10}_k.

Comme $t^{10}_k \geq 2$ on a simplement, modulo les signes, le terme $t^{10}_k\dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{2t^{10}_k+1}}$. Dans le cas d'une forme fermée ce coefficient doit être nul. Or il ne l'est pas par définition donc contradiction. Donc $t^{10}_k \in \{0,1\}$

Maintenant, soit $t^1_k = max(\{r|\exists i,j, \dfrac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}} \neq 0\})$ et supposons que $t^1_k \geq 2$.

Regardons les coefficients des termes $Y^j_{2(t^1_k-1)}Z^i_{(3)}$ avec i,j les indices qui interviennent dans la définition de t^1_k.

Puisque $t^{10} < 2$, $\dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2r+1)}} = 0$ pour $r \geq 2$ et comme $t^1_k \geq 2$ on a simplement, modulo les signes, le terme $t^1_k\dfrac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{2t^1_k}}$. Dans le cas d'une forme fermée ce coefficient doit être nul. Or il ne l'est pas par définition donc contradiction. Donc $t^1_k \in \{0,1\}$

Et enfin, soit $t^0_k = max(\{r|\exists i,j, \dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}} \neq 0\})$ et supposons que $t^0_k \geq 2$.

Regardons les coefficients des termes $Y^j_{2(t^0_k-1)}Z^i_{(2)}$ avec i,j les indices qui interviennent dans la définition de t^0_k.

Puisque $t^{11} < 2$, $\dfrac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2r)}} = 0$ pour $r \geq 2$ et comme $t^0_k \geq 3$ on a simplement, modulo les signes, le terme $t^0_k\dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{2t^0_k}}$. Dans le cas d'une forme fermée ce coefficient doit être nul. Or il ne l'est pas par définition donc contradiction. Donc $t^0_k \in \{0,1,2\}$

Enfin, les termes en $Y^j_{(2)}Z^i_{(2)}$ donnent alors la relation :

$$2\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(4)}} = (-1)^k\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(3)}}$$

et comme le membre de droite ne dépend pas de $u_{(4)}$, on a :

$$\frac{\partial^2\omega^0_{ij}}{\partial u^l_{(4)}\partial u^k_{(4)}} = 0$$

□

Cependant une classification systématique de toutes les formes symplectiques locales d'ordre 1 conduit à des calculs trop compliqués pour nous. Comme dans le cas classique l'on se contente d'étudier les formes locales d'ordre 1 homogènes. Modulo les signes, la démonstration est essentiellement la même que celle de l'ordre 1 du cas classique.

3.3.3. Formes locales homogènes d'ordre 1. —

Définition 54. — *Une forme locale homogène d'ordre* 1 *sur SLM s'écrit localement sous la forme :*

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j+1)+i+j} X^j Y^i_{(1)} \omega^1_{ij}(x,\theta,u) + (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.j+(i+j).(k+1)+i.k} X^j Y^i u^k_{(1)} \omega^0_{ikj}(x,u)$$

càd

$$\omega^0_{ij} = (-1)^{(i+j).(k+1)+i.k} u^k_1 \omega^0_{ikj}(x,u)$$

Proposition 3.24. — *La condition d'antisymétrie est équivalente au système d'équations :*

$$\partial_c(\omega^1_{ij}) = 0$$

$$\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^1_{ji}(x,u)$$

$$(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)}\omega^0_{jki} = \frac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial u^k} \tag{3.3.9}$$

Démonstration. — Il suffit de développer $(\omega^1_{ij})_{(1)}$ et d'identifier les termes en $u^k_{(1)}$ et les autres. □

La condition de fermeture s'écrit :

$$\begin{aligned}
0 \;=\; & (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}((-1)^{(i+j+k).(l+1)+i.l} Y^j Z^i u^l_{(1)} \frac{\partial \omega^0_{ilj}}{\partial u^k} \\
- \; & (-1)^k(-1)^{(i+j).(k+1)+i.k}(-1)^{(Y^j+Z^i)} D_c(Y^j Z^i \omega^0_{ikj})) \\
& -(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}(-1)^{(l+1).(i+j+k)+i.l} Y^j Z^i u^l_{(1)} \frac{\partial \omega^0_{ilk}}{\partial u^j} \\
- \; & (-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{(i+k).(j+1)+i.j} Y^j_{(1)} Z^i \omega^0_{ijk} \\
& +(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}(-1)^{(l+1).(i+j+k)+j.l} Y^j Z^i u^l_{(1)} \frac{\partial \omega^0_{jlk}}{\partial u^i} \\
+ \; & (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.k} Y^j Z^i_{(1)} (-1)^{i.k} \omega^0_{jik} \\
& +(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k)}(-1)^{i+j} Y^j Z^i_{(1)} \frac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial u^k} \\
& -(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{i+j+k} Y^j Z^i_{(1)} \frac{\partial \omega^1_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.(k+1)}(-1)^{j+k} Y^j_{(1)} Z^i \frac{\partial \omega^1_{jk}}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

On regroupe les termes en fonction des $Y^j_{(r)} Z^i_{(s)} (u^l_{(1)})^m$ avec $m,r,s \in \{0,1\}$. Chacun doit être nul.

Pour $Y^j Z^i$, on a :

$$\partial_c(\omega^0_{ikj}) = 0$$

Pour $Y^j Z^i u^l_{(1)}$, on a :

(3.3.10)
$$(-1)^{l.(j+k)}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{j.k+l.(j+k)}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)+l.(i+k)}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i} = 0$$

Pour $Y^j_{(1)} Z^i$, on a :

$$(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + \omega^0_{ijk} = (-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i} \tag{3.3.11}$$

Et enfin, pour $Y^j Z^i_{(1)}$, on a :

$$-(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} + \frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j} = 0$$

Par antisymétrie 3.3.9, cette équation est équivalente à la précédente. Cependant, si on soustrait cette équation à la précédente, on a :

$$(-1)^{j.k}2\omega^0_{ikj} = (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} - \omega^0_{ijk} + \frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i} \tag{3.3.12}$$

La première indique que les ω^0_{ijk} ne dépendent pas explicitement de x ou de θ et puisque les ω^1_{ij} ne dépendent pas non plus de x et θ, on peut déterminer leur nature géométrique.

Proposition 3.25. —
(i) *Les coefficients ω^1_{ij} sont les coefficients d'une métrique Riemanienne g.*
(ii) *Les coefficients ω^0_{ikj} sont les coefficients de Christoffel d'une connexion ∇ sur M compatible avec la métrique g.*

Démonstration. — D'après 3.7, on a :

$$\omega'^1_{kl} = (-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})\omega^1_{ij}$$

et puisque $\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^1_{ji}$, on a bien que les ω^1_{ij} sont les coefficients d'une métrique sur M.

$$\omega'^0_{lm} = (-1)^{(i+l).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^m}(\frac{\partial u^i}{\partial v^l}\omega^0_{ij} + (-1)^{l+j}(\frac{\partial u^i}{\partial v^l})_{(1)}\omega^1_{ij})$$

Et puisque
$u^k_{(1)} = v^n_{(1)}\frac{\partial u^k}{\partial v^n}$ et $(\frac{\partial u^i}{\partial v^l})_{(1)} = v^n_{(1)}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^n \partial v^l}$, on a :

$$(-1)^{(n+1).(l+m)+n.l}v^n_{(1)}\omega'^0_{lnm} = (-1)^{(i+l).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^m}((-1)^{(k+1).(i+j)+i.k}\frac{\partial u^i}{\partial v^l}v^n_{(1)}\frac{\partial u^k}{\partial v^n}\omega^0_{ikj} + (-1)^{l+j}v^n_{(1)}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^n\partial v^l}\omega^1_{ij})$$

càd

$$\omega'^0_{lnm} = (-1)^{j.(i+k+l+n)}(-1)^{i.(k+n)}\frac{\partial u^j}{\partial v^m}\frac{\partial u^k}{\partial v^n}\frac{\partial u^i}{\partial v^l}\omega^0_{ikj} + (-1)^{(i+l+n).m}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^n\partial v^l}\frac{\partial u^j}{\partial v^m}\omega^1_{ij}$$

or les coefficients de Christoffel covariants se transforment de la même manière selon

$$\Gamma'_{mno} = (-1)^{k.(i+j+m+n)+j.(i+m)} \frac{\partial u^k}{\partial u'^o} \frac{\partial u^j}{\partial u'^n} \frac{\partial u^i}{\partial u'^m} \Gamma_{ijk} + (-1)^{(m+n+i).o} \frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^n \partial u'^m} \frac{\partial u^j}{\partial u'^o} g_{ij}$$

Et la condition d'antisymétrie 3.3.9 est exactement la condition de compatibilité avec la métrique.

□

On obtient alors le théorème de classification similaire à celui du cas classique pour les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 1.

Théorème 3.26. —
Soit M une supervariété.
Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 1 *sur SLM sont en bijection avec les couples (g, ∇) où :*

(i) *g est une métrique Riemanienne sur M*
(ii) *∇ est une connexion sur M compatible avec la métrique g et telle que la torsion (sous forme covariante) soit une* 3*-forme fermée sur M.*

La bijection est donnée par la formule :

$$\iota(X, Y)\omega(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X \iota(X, \nabla_{\dot{\gamma}} Y) g$$

Démonstration. — On peut déjà vérifier que la formule de bijection est bien la bonne.

On a :

$\dot{\gamma} = u^k_{(1)} \partial_k$ qui est un vecteur impair.

$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = u^k_{(1)} \partial_k Y^i \partial_i + (-1)^{Y^i} Y^i u^k_{(1)} \Gamma^j_{ik} \partial_j = D_c(Y^i)\partial_i + (-1)^{Y^i} Y^i u^k_{(1)} \Gamma^l_{ik} \partial_l$

et ainsi :

$$\begin{array}{rl} & (-1)^X \iota(X, \nabla_{\dot{\gamma}} Y) g \\ = & (-1)^{X+(Y^i+1).j} X^j D_c(Y^i) g_{ij} + (-1)^{X+(Y+1+l).j} X^j (-1)^{Y^i} Y^i u^k_{(1)} \Gamma^l_{ik} g_{lj} \\ = & (-1)^{X+(Y^i+1).j} X^j D_c(Y^i) g_{ij} + (-1)^{X+Y^i+(Y^i+1+k).j} X^j Y^i u^k_{(1)} \Gamma_{ikj} \\ = & (-1)^{X+Y} X^j ((-1)^{Y^i.(j+1)+i+j} Y^i_{(1)} g_{ij} + (-1)^{i.k+Y^i.j+(1+k).(i+j)} Y^i u^k_{(1)} \Gamma_{ikj} \end{array}$$

qui est bien identique à

$$(-1)^{X+Y} X^j ((-1)^{Y^i.(j+1)+i+j} Y^i_{(1)} \omega^1_{ij} + (-1)^{Y^i.j+(i+j).(k+1)+i.k} Y^i u^k_{(1)} \omega^0_{ikj})$$

Maintenant, il suffit de vérifier que les conditions sur la torsion de la connexion sont équivalentes aux conditions 3.3.10 et 3.3.11 imposées par la condition de fermeture de la forme sachant que toutes les autres sont déjá vérifiées.

Or sous la condition d'antisymétrie, la condition 3.3.11 est équivalente à

$$(-1)^{j.k} \omega^0_{ikj} + \omega^0_{ijk} = (-1)^{(i+j).k} \omega^0_{kij} + (-1)^{i.j} \omega^0_{jik}$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{j.k} T_{ikj} = -T_{ijk}$$

Puisque les coefficients T_{ijk} sont par définition antisymétrique en i, j, on a que les T_{ijk} sont bien les coefficients d'une 3-forme.

Maintenant la condition 3.3.12 (équivalente à 3.3.11) s'écrit aussi :

$$T_{ijk} = -(-1)^{j.k} 2\omega^0_{ikj} + \frac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k} \frac{\partial \omega^1_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k)} \frac{\partial \omega^1_{jk}}{\partial u^i}$$

Or,

$$\begin{aligned}
(dT)_{ijkl} &= -\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} + (-1)^{l.k} \frac{\partial T_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)} \frac{\partial T_{ikl}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j+l)} \frac{\partial T_{jkl}}{\partial u^i} \\
&= (-1)^{j.k} 2 \frac{\partial \omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{l.(j+k)} 2 \frac{\partial \omega^0_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.k+l.(j+k)} 2 \frac{\partial \omega^0_{ilk}}{\partial u^j} \\
&\quad -(-1)^{i.(k+j)+l.(i+k)} 2 \frac{\partial \omega^0_{jlk}}{\partial u^i} - \left(\frac{\partial^2 \omega^1_{ij}}{\partial u^l \partial u^k} - (-1)^{j.k} \frac{\partial^2 \omega^1_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} + (-1)^{i.(j+k)} \frac{\partial^2 \omega^1_{jk}}{\partial u^l \partial u^i} \right) \\
&\quad +(-1)^{l.k} \left(\frac{\partial^2 \omega^1_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} - (-1)^{j.l} \frac{\partial^2 \omega^1_{il}}{\partial u^k \partial u^j} + (-1)^{i.(j+l)} \frac{\partial^2 \omega^1_{jl}}{\partial u^k \partial u^i} \right) \\
&\quad -(-1)^{j.(k+l)} \left(\frac{\partial^2 \omega^1_{ik}}{\partial u^j \partial u^l} - (-1)^{k.l} \frac{\partial^2 \omega^1_{il}}{\partial u^j \partial u^k} + (-1)^{i.(j+l)} \frac{\partial^2 \omega^1_{kl}}{\partial u^j \partial u^i} \right) \\
&\quad +(-1)^{i.(k+j+l)} \left(\frac{\partial^2 \omega^1_{jk}}{\partial u^i \partial u^l} - (-1)^{k.l} \frac{\partial^2 \omega^1_{jl}}{\partial u^i \partial u^k} + (-1)^{j.(i+l)} \frac{\partial^2 \omega^1_{kl}}{\partial u^i \partial u^j} \right)
\end{aligned}$$

Les termes en les dérivées secondes des ω^1_{ij} se simplifient et ainsi :

$$\frac{1}{2}(dT)_{ijkl} = (-1)^{j.k} \frac{\partial \omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{l.(j+k)} \frac{\partial \omega^0_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.k+l.(j+k)} \frac{\partial \omega^0_{ilk}}{\partial u^j} - (-1)^{i.(k+j)+l.(i+k)} \frac{\partial \omega^0_{jlk}}{\partial u^i}$$

Le membre de gauche étant exactement le terme de 3.3.10, cette condition est vérifiée ssi la forme de torsion est fermée.

□

3.4. Formes d'ordre 2 sur SLM

Dans cette partie, l'on s'intéresse aux formes censées "généraliser" les formes du premier ordre classique. Comme pour l'ordre 0, l'on verra que l'on obtient des formes plus riches sur SLM mais qui s'expriment toujours au moyen de métriques et de connexions sur M. D'autre part, on pourra aussi considérer les formes d'ordre 2 qui ne font pas intervenir de dérivation en D_c mais seulement en D_x, ce qui nous permettra de "retrouver" les formes du premier ordre dans le cas classique.

3.4.1. Courbure d'une connexion sur une supervariété Riemanienne. —

Dans ce paragraphe, nous poursuivons les rappels de géométrie riemanienne et nous introduisons la notion de courbure dont nous aurons besoin dans l'étude des formes symplectiques d'ordre 2 sur SLM.

Définition 55. — *Soit M une supervariété et ∇ une connexion sur M. Le tenseur de courbure de la connexion est le tenseur R de coordonnées R^l_{ijk} défini par :*

$$\forall X,Y,Z \in TM,\ \ \iota(X,Y,Z)R = ([\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]})(Z) = (-1)^{Y^j.k+Z^i.(j+k)}X^kY^jZ^iR^l_{ijk}\partial_l$$

Proposition 3.27. —

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{(i+j+s).k}\Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk} - (-1)^{(i+s).j}\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sj}$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla_Y(Z)) &= \nabla_X(Y(Z^i)\partial_i + (-1)^{Z^i.j}Y^jZ^i\Gamma^l_{ij}\partial_l)\\
&= X(Y(Z^i))\partial_i + (-1)^{(Y+Z^i).k}X^kY(Z^i)\Gamma^l_{ik}\partial_l + (-1)^{Z^i.j}X(Y^j)Z^i\Gamma^l_{ij}\partial_l\\
&\quad +(-1)^{(X+Z^i).j+X.Y}Y^jX(Z^i)\Gamma^l_{ij}\partial_l + (-1)^{Z^i.(j+k)+Y^j.k}X^kY^jZ^i\partial_k(\Gamma^l_{ij})\partial_l\\
&\quad +(-1)^{Z^i.(j+k)+Y^j.k}X^kY^jZ^i(-1)^{(i+j+s).k}\Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk}\partial_l
\end{aligned}$$

On peut remarquer que le deuxième et le quatrième terme sont symétriques en X et Y et vont donc se simplifier dans le calcul du tenseur de courbure.

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]}(Z) &= [X,Y](Z^i)\partial_i + (-1)^{Z^i.j}[X,Y]^jZ^i\Gamma^l_{ij}\partial_l\\
&= X(Y(Z^i))\partial_i - (-1)^{X.Y}Y(X(Z^i))\partial_i + (-1)^{Z^i.j}X(Y^j)(Z^i)\Gamma^l_{ij}\partial_l\\
&\quad -(-1)^{X.Y}(-1)^{Z^i.k}Y(X^k)(Z^i)\Gamma^l_{ik}\partial_l
\end{aligned}$$

On peut remarquer que les premier et troisième termes de ces deux expressions se simplifient.

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
([\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]})(Z) = (-1)^{Z^i.(j+k)+Y^j.k}X^kY^jZ^i(&\frac{\partial\Gamma^l_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial u^j}\\
&+(-1)^{(i+j+s).k}\Gamma^s_{ij}\Gamma^l_{sk} - (-1)^{(i+s).j}\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{sj})\partial_l
\end{aligned}$$

□

On peut alors vérifier que dans un changement de coordonnées, les R^l_{ijk} se comportent bien comme les composantes d'un tenseur. On a :

$$R'^p_{mno} = \partial_o(\Gamma'^p_{mn}) - (-1)^{n.o}\partial_n(\Gamma'^p_{mo}) + (-1)^{(m+n+r).o}\Gamma^r_{mn}\Gamma^p_{ro} - (-1)^{(m+r).n}\Gamma^r_{mo}\Gamma^p_{rn}$$

Avant de commencer le calcul, remarquons que :

(3.4.1)

$$\partial_m(\frac{\partial u'^p}{\partial u^j}) = (-1)^{i.j}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\frac{\partial^2u'^p}{\partial u^j\partial u^i} = (-1)^{j.m}(\partial_j(\frac{\partial u'^p}{\partial u'^m}) - \frac{\partial^2u^i}{\partial u^j\partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}) = -(-1)^{j.m}\frac{\partial^2u^i}{\partial u^j\partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^i}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\partial_o(\Gamma'^p_{mn}) \\
=\ & \frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\partial_k(\frac{\partial^2 u^r}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^r} + (-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l}) \\
=\ & \frac{\partial^3 u^r}{\partial u'^o \partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^r} + (-1)^{o.(r+n+m)}\frac{\partial^2 u^r}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^r} + (-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^o \partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} \\
& +(-1)^{j.(i+m)+o.(j+n)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^o \partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} + (-1)^{j.(i+m)+k.(j+n+i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u^m}\partial_k\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} \\
& +(-1)^{j.(i+m)+o.(l+n+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^l}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(m+n+r).o}\Gamma'^r_{mn}\Gamma'^p_{ro} \\
=\ & (-1)^{(m+n+r).o}(\frac{\partial^2 u^s}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^r}{\partial u^s} + (-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^r}{\partial u^l}) \\
& (\frac{\partial^2 u^t}{\partial u'^o \partial u'^r}\frac{\partial u'^p}{\partial u^t} + (-1)^{k.(r+l)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^l}{\partial u'^r}\Gamma^q_{lk}\frac{\partial u'^p}{\partial u^q}) \\
=\ & -(-1)^{(m+n).o+o.s}\frac{\partial^2 u^s}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^s} - (-1)^{j.(i+m)+o.(l+m+n)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^l} \\
& +(-1)^{(l+m+n).o}\frac{\partial^2 u^l}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\Gamma^q_{lk}\frac{\partial u'^p}{\partial u^q} + (-1)^{(l+m+n).k}(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\Gamma^q_{lk}\frac{\partial u'^p}{\partial u^q}
\end{aligned}$$

car d'après 3.4.1, on a :

$$(-1)^{r.o}\frac{\partial u'^r}{\partial u^s}\frac{\partial^2 u^t}{\partial u'^o \partial u'^r}\frac{\partial u'^p}{\partial u^t} = \frac{\partial^2 u^t}{\partial u^s \partial u'^o}\frac{\partial u'^p}{\partial u^t} = -(-1)^{o.s}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^s}$$

et

$$(-1)^{o.r}\frac{\partial u'^r}{\partial u^l}\frac{\partial^2 u^t}{\partial u'^o \partial u'^r}\frac{\partial u'^p}{\partial u^t} = -(-1)^{o.l}\frac{\partial^2 u'^p}{\partial u'^o \partial u^l}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
&\partial_o(\Gamma'^p_{mn})+(-1)^{(m+n+r).o}\Gamma'^r_{mn}\Gamma'^p_{ro} = \frac{\partial^3 u^r}{\partial u'^o \partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u'^p}{\partial u^r}+(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^o \partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l}+ \\
&(-1)^{j.(i+m+o)+o.n}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^o \partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} + (-1)^{(i+m+n).j}\frac{\partial u^j}{\partial u'^o}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^n \partial u'^m}\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} + \\
&(-1)^{j.(i+m)+k.(j+n+i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u^m}\partial_k\Gamma^l_{ij}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l} \\
&+ (-1)^{(i+j+m+n).k}(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}(-1)^{(i+j).k}\Gamma^l_{ij}\Gamma^q_{lk}\frac{\partial u'^p}{\partial u^q}
\end{aligned}$$

Comme les deux premiers termes sont symétriques en o et n et la somme des troisième et quatrième termes aussi, on a ainsi :

$$R'^p_{mon} = (-1)^{j.(i+k+m+o)+k.(i+m)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}R^l_{ikj}\frac{\partial u'^p}{\partial u^l}$$

Soit g une métrique sur M, on peut alors définir les coordonnées covariantes du tenseur de courbure.

Définition 56. —
$$R_{ijkl} = (-1)^{(i+j+k+m).l} R_{ijk}^m g_{ml}$$

Proposition 3.28. — *Si ∇ est compatible avec la métrique g, alors :*
$$R_{ijkl} = (-1)^{k.l} \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)} \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{l.k} \Gamma_{lk}^m \Gamma_{ijm} + (-1)^{(l+k).j} \Gamma_{lj}^m \Gamma_{ikm}$$

Démonstration. — Si ∇, donnée par ses coefficients de Christoffel Γ_{ijk} covariants est compatible avec la métrique, alors

$$\partial_k(g_{ij}) = (-1)^{j.k} \Gamma_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)} \Gamma_{jki}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} \\ = \;& (-1)^{(i+j+m).l} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m g_{ml}}{\partial u^k} \\ = \;& (-1)^{(i+j+m).l} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} g_{ml} + (-1)^{(i+j+m).(l+k)} \Gamma_{ij}^m \frac{\partial g_{ml}}{\partial u^k} \\ = \;& (-1)^{(i+j+m).l} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} g_{ml} + (-1)^{(i+j+m).(l+k)} \Gamma_{ij}^m ((-1)^{l.k} \Gamma_{mkl} + (-1)^{m.(l+k)} \Gamma_{lkm}) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & R_{ijkl} \\ = \;& (-1)^{(i+j+k+m).l} R_{ijk}^m g_{ml} \\ = \;& (-1)^{(i+j+k+m).l} \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} g_{ml} - (-1)^{j.k} \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} g_{ml} + (-1)^{(i+j+s).k} \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^m g_{ml} - (-1)^{(i+s).j} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^m g_{ml}\right) \\ = \;& (-1)^{(i+j+k+m).l} \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k} g_{ml} - (-1)^{j.k} (-1)^{(i+j+k+m).l} \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j} g_{ml} + (-1)^{(i+j+s).(k+l)} \Gamma_{ij}^s \Gamma_{skl} \\ & -(-1)^{(i+s).(j+l)+l.k} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sjl} \end{aligned}$$

Et finalement, en remplaçant,
$$R_{ijkl} = (-1)^{k.l} \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)} \frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k} \Gamma_{ij}^m \Gamma_{lkm} + (-1)^{(i+k).(l+j)+(l+k).j} \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ljm}$$

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} & (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k} \Gamma_{ij}^m \Gamma_{lkm} = (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+m.(p+l+k)} \Gamma_{ij}^m \Gamma_{lk}^p g_{pm} \\ = \;& (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+(p+g).(p+l+k)+p.m} \Gamma_{ij}^m g_{mp} \Gamma_{lk}^p \\ = \;& (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+p.(p+l+k+i+j)+g.(p+l+k)} \Gamma_{ijp} \Gamma_{lk}^p = (-1)^{l.k} \Gamma_{lk}^p \Gamma_{ijp} \end{aligned}$$

càd :

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{lkm} = (-1)^{(i+j).(l+k)} \Gamma_{lk}^m \Gamma_{ijm} \tag{3.4.2}$$

et finalement :

$$R_{ijkl} = (-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{l.k}\Gamma^m_{lk}\Gamma_{ijm} + (-1)^{(l+k).j}\Gamma^m_{lj}\Gamma_{ikm}$$

□

3.4.2. Formes locales homogènes d'ordre 2 restreintes. —

Dans cette partie, en suivant la remarque 3.1.2 nous regardons les formes locales symplectiques d'ordre 2 dont les coefficients ω^1_{ij} sont nuls. On les appelera les formes locales homogènes d'ordre 2 restreintes. Elle s'écrivent :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.j}X^j(Y^i_{(2)}\omega^2_{ij} + Y^i\omega^0_{ij})$$

avec

$$\omega^2_{ij} = \omega^2_{ij}(x,u)$$

$$\omega^0_{ij} = (-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\omega^0_{lkij}(x,u) + (-1)^{j.k}u^k_{(2)}\omega^0_{ikj}(x,u)$$

tel que $\omega^0_{lkij} = -(-1)^{l.k}\omega^0_{klij}$. Comme précédemment, cette condition n'est pas restrictive par symétrie des termes $u^k_{(1)}u^l_{(1)}$.

Proposition 3.29. — *La condition d'antisymétrie se traduit par :*

$$\omega^2_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^2_{ji}$$

$$\partial_x(\omega^2_{ij}) = 0$$

$$(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)}\omega^0_{jki} = \frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} \tag{3.4.3}$$

$$\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{lkji} = 0$$

Démonstration. — La première relation est automatique. Pour la deuxième, il suffit de développer et de regrouper les termes en $u^k_{(2)}$, $u^k_{(1)}u^l_{(1)}$ et le reste, et on a :

$$\omega^0_{ij} = (-1)^{i.j}(\omega^2_{ji})_{(2)} - (-1)^{i.j}(\omega^0_{ji}) = \partial_c(\omega^2_{ij}) + u^k_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{i.j}(\omega^0_{ji})$$

□

Puisque ω^2_{ij} ne dépend pas explicitement de x, on peut écrire

$$\omega^2_{ij} = (\omega^2_{ij})_0(u) + \theta(\omega^2_{ij})_1(u)$$

avec $(\omega^2_{ij})_t$ symétrique en i j pour $t \in \{0,1\}$.

D'après 3.9, on en conclut que $(\omega^2_{ij})_0$ et $(\omega^2_{ij})_1$ sont les coefficients de 2 métriques sur M, g_0 et g_1.

La relation de fermeture est :

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).k}Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j}\\
&+(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^j_{(2)}Z^i\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i}\\
&+(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k} - D^2_c(Y^jZ^i(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}))\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}D^1_c(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})\\
&-(-1)^{Y.(k)}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i}\\
&-(-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}Y^j_{(1)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(1)}} + (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(1)}}\\
&-(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^j_{(2)}Z^i(-1)^{k.j}\omega^0_{ijk} + (-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i_{(2)}(-1)^{k.i}\omega^0_{jik}
\end{aligned}
$$

Elle se traduit par les équations suivantes :

Les termes en $Y_{(2)}Z$ donnent :

$$\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i} = (-1)^{(i+k).j+k.i}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)}\omega^0_{ijk} \tag{3.4.4}$$

Les termes en $YZ_{(2)}$ donnent une relation équivalente par antisymétrie :

$$\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j} - (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} = 0$$

Les termes en $Y^j_{(1)}Z^i$ donnent :

$$(-1)^{(i+k).j}\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.k}\omega^0_{ljik} = 0 \tag{3.4.5}$$

où l'on a utilisé que $\dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} = (-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k}u^l_{(1)}\omega^0_{lkij}$.

Les termes en $Y^jZ^i_{(1)}$ donnent :

$$(-1)^{(i+j).k}\omega^0_{lkij} + \omega^0_{lijk} = 0$$

qui est bien équivalente à la précédente d'après la relation d'antisymétrie $\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{lkji} = 0$.

Enfin, les termes en Y^jZ^i donnent :

$$\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{(i+j).k}D^2_c(\omega^0_{kij}) - (-1)^kD_c(\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}) - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i} = 0$$

En développant chaque terme et en regroupant suivant les termes linéaires en $u_{(2)}$, quadratiques en $u_{(1)}$, linéaires en $u_{(1)}$ et les autres, on a :

(3.4.6)

$$(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k}-(-1)^{j.k+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{i.l+j.k}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j)+j.l}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i}=(-1)^{(i+j).k}\omega^0_{lkij}$$

(3.4.7)

$$\frac{\partial\omega^0_{mlij}}{\partial u^k}+(-1)^{m.(i+j+k+l)+(i+j).k}\frac{\partial\omega^0_{lkij}}{\partial u^m}-(-1)^{(i+j).k+l.(i+j+k)}\frac{\partial\omega^0_{mkij}}{\partial u^l}-(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{mlik}}{\partial u^j}$$
$$+(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^0_{mljk}}{\partial u^i}=0$$

$$\partial_c(\omega^0_{lkij})=0$$

$$\partial_x(\omega^0_{kij})=0$$

Grâce aux deux dernières équations, on peut enfin déterminer la nature des coefficients de la forme symplectique ω puisque $\omega^0_{lkij}=\omega^0_{lkij}(u)$ et $\omega^0_{kij}=\omega^0_{kij}(\theta,u)$.

Proposition 3.30. — *Soit ω une forme symplectique locale homogène d'ordre 2 restreinte, alors*

(i) $\omega^2_{ij}=(\omega^2_{ij})_0+\theta(\omega^2_{ij})_1$ *où* $(\omega^2_{ij})_0$ *et* $(\omega^2_{ij})_1$ *sont les coefficients de* 2 *métriques sur* M, g_0 *et* g_1.

(ii) $\omega^0_{kij}=(\omega^0_{kij})_0(u)+\theta(\omega^0_{kij})_1$ *où pour* $t=0$ *et* $t=1$, *les* $(\omega^0_{kij})_t$ *sont les coefficients de Christoffel covariant (pour la métrique* g_t*) d'une connexion* ∇_t *sur* M *compatible avec la métrique* g_t.

(iii) *les coefficients* ω^0_{ijkl} *sont les coefficients d'un* 4 *tenseur covariant sur* M.

Démonstration. — D'après 3.7, les coefficients ω^0_{ij} se transforment suivant :

$$\omega^0_{ij}=(-1)^{(i+k).l}\frac{\partial u'^l}{\partial u^j}((\frac{\partial u'^k}{\partial u^i})\omega'^0_{kl}+D^2_c(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i})\omega'^2_{kl}$$

On en déduit donc que les ω^0_{ijkl} se transforment comme les coefficients d'un 4-tenseur covariant et que

$$\omega^0_{ikj}=(-1)^{(i+l+n+k).m+(l+i).n}\frac{\partial u'^m}{\partial u^j}\frac{\partial u'^n}{\partial u^k}\frac{\partial u'^l}{\partial u^i}\omega'^0_{lnm}+(-1)^{j.(i+k+l)}\frac{\partial^2 u'^l}{\partial u^k\partial u^i}\frac{\partial u'^m}{\partial u^j}\omega'^2_{lm}$$

càd que les $(\omega^0_{kij})_t$ sont bien les coefficients de Christoffel covariants pour la métrique g_t d'une connexion ∇_t sur M.

La compatibilité avec la métrique est simplement donnée par la relation d'antisymétrie 3.4.3.

□

Maintenant grâce à la relation d'antisymétrie sur les coefficients ω_{ijkl} et la relation 3.4.5, on a que les coefficients ω_{ijkl} sont antisymétriques en les trois derniers indices.

D'après la relation 3.4.6, le membre de gauche étant antisymétrique en k, l, il en va de même pour ω_{lkij} et ainsi les coefficients ω_{ijkl} sont complètement antisymétriques! Ce sont donc les coefficients d'une 4-forme sur M que l'on notera Ξ.

Et 3.4.7 est équivalente à la fermeture de cette forme.

On peut remarquer l'analogie des relations 3.4.3, 3.4.4 et 3.4.6 avec les relations 3.3.9, 3.3.11 et 3.3.10.

On en conclut que les coefficients covariants des torsions T_0 et T_1 respectivement de ∇_0 et ∇_1 sont les coefficients de trois formes sur la supervariété M et que :

$$dT_0 = \Xi$$

$$dT_1 = 0$$

Et ainsi, l'on obtient le théorème de classification suivant :

Théorème 3.31. — *Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre* 2 *restreintes sont en bijection avec les quadruplets* $(g_0, \nabla_0, g_1, \nabla_1)$ *où*

(i) g_0 *et* g_1 *sont des métriques Riemaniennes sur* M

(ii) ∇_0 *est une connexion compatible avec la métrique* g_0 *telle que la torsion covariante* T_0 *soit une* 3*-forme sur* M.

(iii) ∇_1 *est une connexion compatible avec la métrique* g_1 *telle que la torsion covariante* T_1 *soit une* 3*-forme fermée sur* M.

La bijection est donnée par :

$$\iota(X,Y)\omega = (-1)^{X+Y} \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X, (\nabla_0)_{\ddot{\gamma}} Y) g_0 + \iota(X, (\nabla_1)_{\dot{\gamma}} Y) g_1 \theta + \iota(X, Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma})(dT_0)$$

Démonstration. — Il suffit simplement de vérifier la bijection. Or,

$$\nabla_{\ddot{\gamma}} Y = u^k_{(2)} \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} \partial_i + (-1)^{Y^i.k} u^k_{(2)} Y^i \Gamma^j_{ik} \partial_j = (D_c)^2(Y^i)\partial_i + Y^i u^k_{(2)} \Gamma^j_{ik} \partial^j$$

et si g est une métrique, on a :

$$\iota(X, \nabla_{\ddot{\gamma}} Y) g = (-1)^{Y^i.j} X^j (D_c)^2(Y^i) g_{ij} + (-1)^{(Y+l).j} Y^i u^k_{(2)} \Gamma^l_{ik} g_{lj} = (-1)^{Y^i.j} X^j (D_c)^2(Y^i) g_{ij} + (-1)^{(Y^i+k).j} Y^i u^k_{(2)} \Gamma_{ikj}$$

et si ω_{ijkl} sont les coefficients de dT_0, on a :

$$\iota(X, Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma})(dT_0) = (-1)^{Y^i.j+(k+1).(i+j)+(l+1).(i+j+k)} X^j Y^i u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega_{lkij}$$

L'expression sous le signe intégral correspond alors bien à

$$(-1)^{Y^i.j} X^j Y^i_{(2)} \omega^2_{ij} + (-1)^{Y^i.j} X^j Y^j (-1)^{j.k} u^k_{(2)} \omega^0_{ikj} + (-1)^{Y^i.j} X^j Y^i (-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega^0_{lkij}$$

□

3.4.3. Formes locales homogènes d'ordre 2 générales. —

On regarde maintenant toutes les formes locales homogènes d'ordre 2. Elles s'écrivent :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y} (-1)^{Y^i.j} X^j (Y^i_{(2)} \omega^2_{ij} + (-1)^{Y^i+i+j} Y^i_{(1)} \omega^1_{ij} + Y^i \omega^0_{ij})$$

avec

$$\omega^2_{ij} = \omega^2_{ij}(x,u)$$

$$\omega^1_{ij} = (-1)^{(i+j).(k+1)} u^k_{(1)} \omega^1_{kij}(x,u)$$

$$\omega^0_{ij} = (-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega^0_{lkij}(x,u) + (-1)^{j.k} u^k_{(2)} \omega^0_{ikj}(x,u)$$

avec $\omega^0_{lkij} = -(-1)^{l.k}\omega^0_{klij}$

Proposition 3.32. — *La condition d'antisymétrie se traduit par les relations :*

$$\partial_x(\omega^2_{ij}) = 0$$

$$\omega^2_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^2_{ji}$$

$$\partial_c(\omega^1_{kij}) = 0$$

$$\omega^1_{kij} = (-1)^{i.j}\omega^1_{kji}$$

(3.4.8)
$$(-1)^{i.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{j.(i+k)}\omega^0_{jki} = \omega^1_{kij} + (-1)^{(i+j).k} \frac{\partial \omega^2_{ij}}{\partial u^k}$$

(3.4.9)
$$\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{lkji} = (-1)^{(i+j).k} \frac{\partial \omega^1_{lij}}{\partial u^k} - (-1)^{(i+j+k).l} \frac{\partial \omega^1_{kij}}{\partial u^l}$$

Démonstration. — Les relations d'antisymétrie s'écrivent :

$$\omega^2_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^2_{ji}$$

$$\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^1_{ji}$$

$$\omega^0_{ij} = -(-1)^{i.j}(\omega^0_{ji}) + (-1)^{i+j+i.j}(\omega^1_{ji})_{(1)} + (-1)^{i.j}(\omega^2_{ji})_{(2)}$$

Si on développe la dernière équation, on a (en utilisant les deux précédentes) :

$$(-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega^0_{lkij} + (-1)^{j.k} u^k_{(2)} \omega^0_{ikj} = -(-1)^{i.j}((-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega^0_{lkji} + (-1)^{j.k} u^k_{(2)} \omega^0_{jki}) + (-1)^{i+j}((-1)^{(i+j).(k+1)}((-1)^{k+1} u^k_{(1)} \partial_c(\omega^1_{kij}) + (-1)^{(k+1).l} u^l_{(1)} u^k_{(1)} \frac{\partial \omega^1_{kij}}{\partial u^l} + u^k_{(2)}\omega^1_{kij})) + \partial_x(\omega^2_{ij}) + u^k_{(2)} \frac{\partial \omega^2_{ij}}{\partial u^k}$$

Il suffit alors d'identifier les monômes polynomiaux en les $u^l_{(s)}$.

□

La condition de fermeture s'écrit elle :

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j} \\
& +(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^j_{(2)}Z^i\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i} \\
& +(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k)+i+j}(Y^jZ^i_{(1)}(-1)^{(i+j+k).(l+1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{lij}}{\partial u^k}) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k+1)+i+j}D_c(Y^jZ^i_{(1)}(-1)^{(i+j).(k+1)}\omega^1_{kij}) \\
& -(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{i+j+k}Y^jZ^i_{(1)}(-1)^{(i+j+k).(l+1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{lik}}{\partial u^j} \\
& -(-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k)}(-1)^{i+j+k+1}Y^j_{(1)}Z^i_{(1)}(-1)^{(i+k).(j+1)}\omega^1_{jik} \\
& +(-1)^{Z.(k+j+1)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i(-1)^{(i+j+k).(l+1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ljk}}{\partial u^i} \\
& +(-1)^{Z.(k+j)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i_{(1)}(-1)^{(j+k).(i+1)}\omega^1_{ijk} \\
& +(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k} - D^2_c(Y^jZ^i(-1)^{(i+j).k}\omega^0_{kij})) \\
& -(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}D^1_c(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}) \\
& -(-1)^{Y.(k)}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i} \\
& -(-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}Y^j_{(1)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(1)}} + (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(1)}} \\
& -(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}Y^j_{(2)}Z^i(-1)^{(i+k).j}\omega^0_{jik} + (-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}Y^jZ^i_{(2)}(-1)^{(j+k).i}\omega^0_{ijk}
\end{aligned}$$

En regroupant les termes en $Y^j_{(s)}Z^i_{(r)}$, on obtient les équations suivantes :
Les termes en $Y_{(2)}Z$ donnent :

(3.4.10) $$(-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i} = (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + \omega^0_{ijk}$$

Les termes en $YZ_{(2)}$ donnent la relation équivalente :

$$\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{(i+j).k}\omega^1_{kij} - (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} = 0$$

Comme précédemment, on peut ajouter ces deux equations et obtenir la relation :

(3.4.11)
$$\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i} + (-1)^{(i+j).k}\omega^1_{kij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} - \omega^0_{ijk} = 2(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}$$

Les termes en $Y^j_{(1)}Z^i_{(1)}$ donnent :

(3.4.12) $$(-1)^{(i+j).k}\omega^1_{kij} + (-1)^{i.j}\omega^1_{jik} + \omega^1_{ijk} = 0$$

Les termes en $Y^j_{(1)}Z^i$ donnent :

$$\frac{\partial \omega^1_{ljk}}{\partial u^i} = (-1)^{(i+k).j}\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.k}\omega^0_{ljik} \tag{3.4.13}$$

où l'on a utilisé que $\dfrac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} = (-1)^{(i+j).(k+l)+(l+1).k} u^l_{(1)}\omega^0_{lkij}$.

Les termes en $Y^jZ^i_{(1)}$ donnent la relation équivalente :

$$\frac{\partial \omega^1_{lij}}{\partial u^k} - (-1)^{(i+j).k+(i+j+k).l}\frac{\partial \omega^1_{kij}}{\partial u^l} - (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^1_{lik}}{\partial u^j} - (-1)^{(i+j).k}\omega^0_{lkij} + \omega^0_{lijk} = 0$$

Enfin, les termes en Y^jZ^i donnent :

$$\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{(i+j).k}D^2_c(\omega^0_{kij}) - (-1)^k D_c(\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}) - (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial \omega^0_{jk}}{\partial u^i} = 0$$

En développant chaque terme et en regroupant suivant les termes linéaires en $u_{(2)}$, quadratiques en $u_{(1)}$, linéaires en $u_{(1)}$ et les autres, on a :

(3.4.14)
$$(-1)^{i.l}\frac{\partial \omega^0_{ilj}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k+(i+j+k).l}\frac{\partial \omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{j.k+i.l}\frac{\partial \omega^0_{ilk}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)+l.j}\frac{\partial \omega^0_{jlk}}{\partial u^i} = (-1)^{(i+j).k}\omega^0_{lkij}$$

(3.4.15)
$$\frac{\partial \omega^0_{mlij}}{\partial u^k} - (-1)^{l.(i+j+k)+(i+j).k}\frac{\partial \omega^0_{mkij}}{\partial u^l} + (-1)^{m.(i+j+k+l)+(i+j).k}\frac{\partial \omega^0_{lkij}}{\partial u^m} - (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^0_{mlik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial \omega^0_{mljk}}{\partial u^i} = 0$$

$$\partial_c(\omega^0_{lkij}) = 0$$

$$\partial_x(\omega^0_{ikj}) = 0$$

A ce stade, on peut remarquer que le problème peut se scinder en deux. Toutes les quantitées $\omega^s_{ij\cdots}$ se décomposent sous la forme $\omega^s_{ij\cdots} = (\omega^s_{ij\cdots})_0 + (\omega^s_{ij\cdots})_1\theta$. Si l'on observe les conditions d'antisymétrie et de fermeture (et d'invariance), l'on voit que chaque équation peut s'écrire en remplaçant tous les coefficients par soit leur partie paire $(\cdots)_0$ soit par leur partie impaire $(\cdots)_1$.

On peut donc traiter à part la partie de ω_{ij} qui dépend explicitement de θ et l'autre qui n'en dépend pas.

Or, l'on a $\partial_c(\omega^1_{kij}) = 0$, donc la partie en θ est simplement la partie en θ d'une forme symplectique locale homogène d'ordre 2 restreinte, définie par une métrique g_1 et une connexion ∇_1 compatible avec g_1 telle que la torsion covariante soit une 3-forme fermée.

Proposition 3.33. — *Soit ω une forme symplectique locale homogène d'ordre 2 alors sa partie explicite en θ s'écrit :*

$$(-1)^{X+Y}\int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X)\iota((\nabla_1)_{\ddot{\gamma}}Y)g_1\theta$$

Dans la suite, on considère donc que les quantités ne dépendent plus explicitement de θ. D'après les équations précédentes, elles ne dépendent pas de x non plus. On peut donc déterminer la nature géométrique des coefficients.

Proposition 3.34. — *Soit ω une forme symplectique locale homogène d'ordre 2 restreinte, alors*

(i) *Les ω^2_{ij} sont les coefficients d'une métrique g sur M.*
(ii) *Les (ω^0_{kij}) sont les coefficients de Christoffel covariants d'une connexion ∇ sur M.*
(iii) *Les ω^1_{ijk} sont les composantes du tenseur $-\nabla.g$*

Démonstration. — D'après les formules de changement de variables, on a :

$$\omega^2_{ij} = (-1)^{(i+k).l}\frac{\partial u'^l}{\partial u^j}\frac{\partial u'^k}{\partial u^i}\omega'^2_{kl}$$

et puisque ω^2_{ij} ne dépend pas de x, ce sont bien les coefficients d'une métrique sur M.

On a aussi :

$$\omega^0_{ij} = (-1)^{(i+k).l}\frac{\partial u'^l}{\partial u^j}((\frac{\partial u'^k}{\partial u^i})\omega'^0_{kl} + (-1)^{i+l}D_c(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i})\omega'^1_{kl}) + D^2_c(\frac{\partial u'^k}{\partial u^i})\omega'^2_{kl}$$

Et si on ne garde que les termes en $u^k_{(2)}$, on a :

$$(-1)^{j.k}u^k_{(2)}\omega^0_{ikj} = (-1)^{(i+l).m}\frac{\partial u'^m}{\partial u^j}((\frac{\partial u'^l}{\partial u^i})(-1)^{m.n}u^k_{(2)}\frac{\partial u'^n}{\partial u^k}\omega'^0_{lnm} + u^k_{(2)}\frac{\partial^2 u'^l}{\partial u^k\partial u^i})\omega'^2_{lm})$$

càd

$$\omega^0_{ikj} = (-1)^{(i+l+k+n).m+n.(i+l)}\frac{\partial u'^m}{\partial u^j}\frac{\partial u'^n}{\partial u^k}(\frac{\partial u'^l}{\partial u^i})\omega'^0_{lnm} + (-1)^{j.(i+l+k)}\frac{\partial^2 u'^l}{\partial u^k\partial u^i}\frac{\partial u'^m}{\partial u^j}\omega'^2_{lm}$$

Les ω^0_{ikj} se transforment bien comme les coefficients de Christoffel d'une connexion ∇, covariants pour la métrique g.

De plus, d'après 3.4.8, les coefficients ω^1_{ijk} sont complètement déterminés par la métrique et la connexion et d'après 3.3.8, $(\nabla g)_{kij} = \partial_k(\omega^2_{ij}) - (-1)^{(i+k).j}\omega^0_{jki} - (-1)^{i.k}\omega^0_{ikj} = -\omega^1_{kij}$.

□

D'après 3.4.14, les coefficients ω^0_{ijkl} sont complètement déterminés par la métrique et la connexion. On cherche donc à montrer maintenant que la donnée d'une métrique et d'une connexion qui vérifient l'équation 3.4.10 est parfaitement suffisant pour déterminer la forme symplectique.

On peut remarquer que 3.4.8 implique directement la relation de symétrie en i, j des coefficients ω^1_{kij} et couplée avec la relation 3.4.10 implique la relation 3.4.12.

En effet, d'une part, on trouve que :

$$\omega^1_{kij} = (-1)^{(i+k).j}\omega^0_{jki} + (-1)^{i.k}\omega^0_{ikj} - (-1)^{i.j}\partial_k(\omega^2_{ji}) = (-1)^{(i+k).j}T_{jki} + (-1)^{i.k}T_{ikj}$$

càd

$$T_{kij} + (-1)^{i.j} T_{kji} = -\omega^1_{kij} \tag{3.4.16}$$

Et ainsi :
$(-1)^{(i+j).k}\omega^1_{kij} + (-1)^{i.j}\omega^1_{jik} + \omega^1_{ijk} = -(-1)^{(i+j).k}(T_{kij} + (-1)^{i.j}T_{kji}) - (-1)^{i.j}(T_{jik} + (-1)^{i.k}T_{jki}) - (T_{ikj} + (-1)^{k.j}T_{ijk}) = 0$
par antisymétrie de la torsion en les deux premiers indices.

Il faut aussi vérifier qu'avec la définition des ω^0_{ijkl} par 3.4.14, on a bien $\omega^0_{klij} = -(-1)^{k.l}\omega^0_{lkij}$. Il nous suffit de montrer $-(-1)^{i.(k+l)}\dfrac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j} + (-1)^{j.(i+k+l)}\dfrac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i} = (-1)^{i.(k+l)+l.k}\dfrac{\partial\omega^0_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{j.(i+k+l)+l.k}\dfrac{\partial\omega^0_{jkl}}{\partial u^i}$

Or d'après 3.4.10 on a : $(-1)^{i.(k+l)}\dfrac{\partial^2\omega^2_{kl}}{\partial u^j\partial u^i} = (-1)^{k.l}\dfrac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j} + \dfrac{\partial\omega^0_{ikl}}{\partial u^j}$ et par symétrie des termes $\dfrac{\partial^2\omega^2_{kl}}{\partial u^j\partial u^i} = (-1)^{i.j}\dfrac{\partial^2\omega^2_{kl}}{\partial u^i\partial u^j}$, on obtient bien la relation voulue!

La relation 3.4.9 se déduit directement de 3.4.14 et 3.4.8 par :

$$\begin{aligned}
& \omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{lkji} \\
= \;& (-1)^{i.l+(i+j).k}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.(i+l)+(i+j).k}\frac{\partial\omega^0_{jli}}{\partial u^k} - (-1)^{i.k+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} \\
& -(-1)^{j.(i+k)+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{jki}}{\partial u^l} \\
= \;& (-1)^{(i+j).k}\frac{\partial\omega^1_{lij}}{\partial u^k} + (-1)^{(i+j).k}\frac{\partial^2\omega^2_{ij}}{\partial u^k\partial u^l} - (-1)^{(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^1_{kij}}{\partial u^l} - (-1)^{(i+j+l).k}\frac{\partial^2\omega^2_{ij}}{\partial u^l\partial u^k} \\
= \;& (-1)^{(i+j).k}\frac{\partial\omega^1_{lij}}{\partial u^k} - (-1)^{(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^1_{kij}}{\partial u^l}
\end{aligned}$$

La relation 3.4.13 se déduit directement de 3.4.14 et 3.4.8 et 3.4.10 par :

$$\begin{aligned}
& \omega^0_{lkij} + (-1)^{i.k+j.(i+k)}\omega^0_{ljik} \\
= \;& (-1)^{i.j+k.l}\frac{\partial\omega^0_{klj}}{\partial u^i} + (-1)^{j.(i+k+l)}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{i.k+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} \\
& -(-1)^{k.(i+j)}(-1)^{(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ijk}}{\partial u^l} \\
= \;& (-1)^{j.(i+k+l)+l.k}\frac{\partial^2\omega^2_{jk}}{\partial u^i\partial u^l} + (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^1_{lkj}}{\partial u^i} - (-1)^{j.(i+k+l)+l.k}\frac{\partial^2\omega^2_{jk}}{\partial u^i\partial u^l} \\
= \;& \frac{\partial\omega^1_{ljk}}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

Enfin, il ne reste plus qu'à montrer 3.4.15. On a d'après 3.4.14 les cinq égalités suivantes :

$\dfrac{\partial\omega^0_{mlij}}{\partial u^k} = -(-1)^{i.l+m.(i+j+l)}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilj}}{\partial u^k\partial u^m}+(-1)^{i.m+(i+j).l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{imj}}{\partial u^k\partial u^l}+(-1)^{(i+l).m+i.l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilm}}{\partial u^k\partial u^j}-$
$(-1)^{(i+l+m).j+l.m}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jlm}}{\partial u^k\partial u^i}$

$\dfrac{\partial\omega^0_{mkij}}{\partial u^l} = -(-1)^{i.k+m.(i+j+k)}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ikj}}{\partial u^l\partial u^m}+(-1)^{i.m+(i+j).k}\dfrac{\partial^2\omega^0_{imj}}{\partial u^l\partial u^k}+(-1)^{(i+k).m+i.k}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ikm}}{\partial u^l\partial u^j}-$
$(-1)^{(i+k+m).j+k.m}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jkm}}{\partial u^l\partial u^i}$

$(-1)^{(i+j).k}\dfrac{\partial\omega^0_{lkij}}{\partial u^m} = (-1)^{i.l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilj}}{\partial u^m\partial u^k}-(-1)^{j.k+(i+j+k).l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ikj}}{\partial u^m\partial u^l}-(-1)^{j.k+i.l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilk}}{\partial u^m\partial u^j}+$
$(-1)^{i.(k+j)+l.j}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jlk}}{\partial u^m\partial u^i}$

$\dfrac{\partial\omega^0_{mlik}}{\partial u^j} = -(-1)^{i.l+m.(i+k+l)}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilk}}{\partial u^j\partial u^m}+(-1)^{i.m+(i+k).l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{imk}}{\partial u^j\partial u^l}+(-1)^{(i+l).m+i.l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{ilm}}{\partial u^j\partial u^k}-$
$(-1)^{(i+l+m).k+l.m}\dfrac{\partial^2\omega^0_{klm}}{\partial u^j\partial u^i}$

$\dfrac{\partial\omega^0_{mljk}}{\partial u^i} = -(-1)^{j.l+m.(j+k+l)}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jlk}}{\partial u^i\partial u^m}+(-1)^{j.m+(j+k).l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jmk}}{\partial u^i\partial u^l}+(-1)^{(j+l).m+j.l}\dfrac{\partial^2\omega^0_{jlm}}{\partial u^i\partial u^k}-$
$(-1)^{(j+l+m).k+l.m}\dfrac{\partial^2\omega^0_{klm}}{\partial u^i\partial u^j}$

Si on calcule la somme

$$\frac{\partial\omega^0_{mlij}}{\partial u^k}-(-1)^{l.(i+j+k)+(i+j).k}\frac{\partial\omega^0_{mkij}}{\partial u^l}+(-1)^{m.(i+j+k+l)+(i+j).k}\frac{\partial\omega^0_{lkij}}{\partial u^m}-(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{mlik}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^0_{mljk}}{\partial u^i}$$

on trouve :

$$= -(-1)^{l.(i+j+k)}((-1)^{(i+k).m+j.k}\frac{\partial^2\omega^0_{ikm}}{\partial u^l\partial u^j}-(-1)^{(i+m).j+k.(i+m)}\frac{\partial^2\omega^0_{jkm}}{\partial u^l\partial u^i})-(-1)^{j.k}(-1)^{i.m+(i+k).l}\frac{\partial^2\omega^0_{imk}}{\partial u^j\partial u^l}+(-1)^{i.(k+j)}(-1)^{j.m+(j+k).l}\frac{\partial^2\omega^0_{jmk}}{\partial u^i\partial u^l}$$

Et en appliquant 3.4.10, on trouve que cette somme vaut :

$$\begin{aligned}
&= -(-1)^{l.(i+k)}(-1)^{(i+k).m+j.k}(\frac{\partial^2\omega^0_{ikm}}{\partial u^j\partial u^l}-(-1)^{k.m}\frac{\partial^2\omega^0_{imk}}{\partial u^j\partial u^l})\\
&\quad +(-1)^{l.(j+k)}(-1)^{(i+m).j+k.(i+m)}(\frac{\partial^2\omega^0_{jkm}}{\partial u^i\partial u^l}+(-1)^{k.m}\frac{\partial^2\omega^0_{jmk}}{\partial u^i\partial u^l})\\
&= -(-1)^{l.(i+k)}(-1)^{k.(i+j+m)}\frac{\partial^3\omega^2_{km}}{\partial u^j\partial u^l\partial u^i}+(-1)^{l.(j+k)}(-1)^{i.j+k.(i+j+m)}\frac{\partial^3\omega^2_{km}}{\partial u^i\partial u^l\partial u^j}\\
&= 0
\end{aligned}$$

et ainsi 3.4.15 est bien vérifiée.

En termes géométriques, la condition 3.4.10 sous la forme 3.4.16 s'interprète de la façon suivante : $\forall X, Y, Z \in TM$,

$$\iota(X,Y)\nabla_Z(g) = (-1)^{(X+Y).Z)}\iota(Z,\iota(X,Y)T)g + (-1)^{X.Y}\iota(Y,\iota(X,Z)T)g$$

On peut maintenant énoncer le théorème de classification.

Théorème 3.35. — *Soit M une supervariété. Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 2 sur SLM sont en bijection avec les quadruplets (g,∇,g_1,∇_1) tels que :*

(i) *g et g_1 sont deux métriques Riemaniennes sur M.*

(ii) *∇ est une connexion sur M dont la torsion T vérifie :*

$$\forall X,Y,Z\in TM,\ \ \iota(X,Y)\nabla_Z(g) = (-1)^{(X+Y).Z}\iota(Z,\iota(X,Y)T)g+(-1)^{X.Y}\iota(Y,\iota(X,Z)T)g$$

(iii) *∇_1 est une connexion sur M dont la torsion covariante (pour g_1) est une 3-forme fermée.*

On note R la courbure de la connexion ∇. La bijection est alors donnée par la formule :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X)\nabla_{\dot\gamma}(\iota(\nabla_{\dot\gamma}Y)g)+$$

$$\iota(\dot\gamma,\iota(\dot\gamma,X,Y)R+(-1)^{(X+1).Y}\iota(Y,\dot\gamma,X)R-(-1)^{X+Y}\iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}(T))g+\iota(X,(\nabla_1)_{\ddot\gamma}Y)g_1\theta$$

Démonstration. — Comme précédemment, il suffit de vérifier la bijection.

Regardons $\nabla_{\dot\gamma}T$.

$$\begin{array}{rl} & \nabla_l T \\ = & \nabla_l(du^i du^j T_{ij}^k\partial_k) \\ = & -(-1)^{m.l}du^m\Gamma_{ml}^i du^j T_{ij}^k\partial_k - (-1)^{(i+m).l}du^i du^m \Gamma_{ml}^j T_{ij}^k\partial_k + (-1)^{(i+j).l}du^i du^j\partial_l(T_{ij}^k)\partial_k \\ & +(-1)^{k.l}du^i du^j T_{ij}^k\Gamma_{kl}^m\partial_m \\ = & du^i du^j(-(-1)^{i.l+j.(i+l+m)}\Gamma_{il}^m T_{mj}^k - (-1)^{(i+j).l}\Gamma_{jl}^m T_{im}^k + (-1)^{(i+j).l}\partial_l(T_{ij}^k) + (-1)^{m.l}T_{ij}^m\Gamma_{ml}^k)\partial_k \end{array}$$

Pour les coefficients covariants, on a :

$$\partial_k(g_{ij}) = (-1)^{j.k}\Gamma_{ikj} + (-1)^{i.(j+k)}\Gamma_{jki} - (-1)^{k.(i+j)}\omega_{kij}^1$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} & = & (-1)^{(i+j+m).k}\dfrac{\partial T_{ij}^m g_{mk}}{\partial u^l} \\ & = & (-1)^{(i+j+m).k}\dfrac{\partial T_{ij}^m}{\partial u^l}g_{mk} + (-1)^{(i+j+m).(l+k)}T_{ij}^m\dfrac{\partial g_{mk}}{\partial u^l} \\ & = & (-1)^{(i+j+m).k}\dfrac{\partial T_{ij}^m}{\partial u^l}g_{mk} \\ & & +(-1)^{(i+j+m).(l+k)}T_{ij}^m((-1)^{l.k}\Gamma_{mlk} + (-1)^{m.(l+k)}\Gamma_{klm} - (-1)^{l.(k+m)}\omega_{lmk}^1) \end{array}$$

Et donc, en abaissant l'indice, on a les coordonnées suivantes :

$$\begin{aligned}
& (\iota(\nabla_l(T))g)_{ijk} \\
= \; & (-1)^{(i+j+l+s).k}(-(-1)^{i.l+j.(i+l+m)}\Gamma_{il}^m T_{mj}^s - (-1)^{(i+j).l}\Gamma_{jl}^m T_{im}^s \\
& +(-1)^{(i+j).l}\partial_l(T_{ij}^s) + (-1)^{m.l}T_{ij}^m \Gamma_{ml}^s)g_{sk} \\
= \; & -(-1)^{i.l+j.(i+l+m)+(i+l+m).k}\Gamma_{il}^m T_{mjk} - (-1)^{(i+j).l+(j+l+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} \\
& +(-1)^{(i+j).l+(i+j+l+s).k}\partial_l(T_{ij}^s)g_{sk} + (-1)^{m.l+(i+j+m).k}T_{ij}^m \Gamma_{mlk} \\
= \; & -(-1)^{i.l+j.(i+l+m)+(i+l+m).k}\Gamma_{il}^m T_{mjk} - (-1)^{(i+j).l+(j+l+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} \\
& +(-1)^{(i+j).l+l.k}\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} - (-1)^{(i+j+l).k}T_{ij}^m \Gamma_{klm} + (-1)^{(i+j+m).k}T_{ij}^m \omega_{lmk}^1
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{X+Y}\iota(\dot\gamma, \iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}(T))g \\
= \; & (-1)^{X+Y+Y^i.(j+k)+X^j.k+(l+1).(i+j+k)}u_{(1)}^k X^j Y^i u_{(1)}^l(-(-1)^{i.l+j.(i+l+m)+(i+l+m).k}\Gamma_{il}^m T_{mjk} \\
& -(-1)^{(i+j).l+(j+l+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} + (-1)^{(i+j).l+l.k}\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} - (-1)^{(i+j).k}T_{ij}^m \Gamma_{klm} + (-1)^{(i+j+m).k}T_{ij}^m \omega_{lmk}^1) \\
= \; & (-1)^{Y^i.j+k}X^j Y^i u_{(1)}^k u_{(1)}^l(-(-1)^{j.(i+m)+(i+j+m).k}\Gamma_{il}^m T_{mjk} - (-1)^{(j+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} \\
& +\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} - (-1)^{(i+j).(k+l)}T_{ij}^m \Gamma_{klm} + (-1)^{(i+j).(l+k)+k.(l+m)}T_{ij}^m \omega_{lmk}^1) \\
= \; & (-1)^{Y^i.j+(l+1).k}X^j Y^i u_{(1)}^k u_{(1)}^l(-(-1)^{j.(i+m)+(i+l+m).k}\Gamma_{il}^m T_{mjk} - (-1)^{(j+l+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} \\
& +(-1)^{l.k}\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} - (-1)^{(i+j).(k+l)+l.k}T_{ij}^m \Gamma_{klm} + (-1)^{(i+j).(l+k)}T_{ij}^m \omega_{lkm}^1)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} = \; & (-1)^{(i+j+k+m).l}R_{ijk}^m g_{ml} \\
= \; & (-1)^{(i+j+k+m).l}(\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k}g_{ml} - (-1)^{j.k}\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j}g_{ml} + (-1)^{(i+j+s).k}\Gamma_{ij}^s \Gamma_{sk}^m g_{ml} - (-1)^{(i+s).j}\Gamma_{ik}^s \Gamma_{sj}^m g_{ml}) \\
= \; & (-1)^{(i+j+k+m).l}\frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial u^k}g_{ml} - (-1)^{j.k}(-1)^{(i+j+k+m).l}\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial u^j}g_{ml} + (-1)^{(i+j+s).(k+l)}\Gamma_{ij}^s \Gamma_{skl} \\
& -(-1)^{(i+s).(j+l)+l.k}\Gamma_{ik}^s \Gamma_{sjl}
\end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} = \; & (-1)^{k.l}\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}\Gamma_{ij}^m \Gamma_{lkm} \\
& +(-1)^{(i+k).(l+j)+(l+k).j}\Gamma_{ik}^m \Gamma_{ljm} + (-1)^{(i+j).(l+k)}\Gamma_{ij}^m \omega_{klm}^1 - (-1)^{j.k}(-1)^{(i+k).(l+j)}\Gamma_{ik}^m \omega_{jlm}^1
\end{aligned}$$

On calcule alors $R_{ijlk} + (-1)^{i.(j+l)}R_{jlik}$

On a :

$$\begin{aligned}
& R_{ijlk}+(-1)^{i.(j+l)}R_{jlik} \\
= \quad & (-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma_{ijk}}{\partial u^l}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j}-(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}\Gamma_{ij}^m\Gamma_{klm} \\
& +(-1)^{(i+l).(k+j)+(l+k).j}\Gamma_{il}^m\Gamma_{kjm}+(-1)^{(i+j).(l+k)}\Gamma_{ij}^m\omega_{lkm}^1-(-1)^{j.l}(-1)^{(i+l).(k+j)}\Gamma_{il}^m\omega_{jkm}^1 \\
& +(-1)^{i.(j+l)}((-1)^{k.i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{l.(k+i)}\frac{\partial\Gamma_{jik}}{\partial u^l}-(-1)^{(j+l).(i+k)+i.k}\Gamma_{jl}^m\Gamma_{kim} \\
& +(-1)^{(j+i).(k+l)+(i+k).l}\Gamma_{ji}^m\Gamma_{klm}+(-1)^{(j+l).(i+k)}\Gamma_{jl}^m\omega_{ikm}^1-(-1)^{l.i}(-1)^{(i+j).(k+l)}\Gamma_{ji}^m\omega_{lkm}^1) \\
= \quad & (-1)^{(j+k+l).i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{k.l}\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} \\
& -(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}T_{ij}^m\Gamma_{klm}+(-1)^{(i+l).(k+j)+(l+k).j}\Gamma_{il}^m T_{kjm}-(-1)^{(i+j+l).k}\Gamma_{jl}^m T_{kim} \\
& +(-1)^{(i+j).(l+k)}T_{ij}^m\omega_{lkm}^1+(-1)^{(i+l).(k+j)+l.j}\Gamma_{il}^m\Gamma_{jkm}-(-1)^{(j+l).k}\Gamma_{jl}^m\Gamma_{ikm} \\
& -(-1)^{j.l}(-1)^{(i+l).(k+j)}\Gamma_{il}^m\omega_{jkm}^1+(-1)^{(j+l).k}\Gamma_{jl}^m\omega_{ikm}^1
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant 3.4.16, sous les formes $T_{ikm}=-(-1)^{k.m}T_{imk}-\omega_{ikm}^1$ et $T_{jkm}=(-1)^{(k+j).m}T_{mjk}-\omega_{jkm}^1$, on a :

$$\begin{aligned}
& R_{ijlk}+(-1)^{i.(j+l)}R_{jlik} \\
= \quad & (-1)^{(j+k+l).i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{k.l}\frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^l} \\
& -(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}T_{ij}^m\Gamma_{klm}-(-1)^{(i+l).(k+j)+l.j}\Gamma_{il}^m(-1)^{(k+j).m}T_{mjk}-(-1)^{(j+l+m).k}\Gamma_{jl}^m T_{imk} \\
& +(-1)^{(i+j).(l+k)}T_{ij}^m\omega_{lkm}^1+(-1)^{(i+l).(k+j)+l.j}\Gamma_{il}^m\Gamma_{jkm}-(-1)^{(j+l).k}\Gamma_{jl}^m\Gamma_{ikm}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \iota(\dot\gamma,\iota(\dot\gamma,X,Y)R)g \\
= & (-1)^{(X+Y+1+m).k}u_{(1)}^k(-1)^{(Y^i.(j+l)+X^j.l)}u_{(1)}^l X^j Y^i R_{ijl}^m g_{mk} \\
= & (-1)^{(1+l).k}(-1)^{Y^i.j}X^jY^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lR_{ijlk}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(X+1).Y}\iota(\dot\gamma,\iota(Y,\dot\gamma,X)R)g \\
= & (-1)^{(X+1).Y+(X+Y+1+m).k}u_{(1)}^k(-1)^{(X^j.(i+l)+(l+1).i}Y^iu_{(1)}^lX^jR_{jli}^m g_{mk} \\
= & (-1)^{(X^i+Y^j+1+l).k+(k+1).(Y^i+X^j)}(-1)^{(X^j.(i+l)+(l+1).(i+X^j)+Y^i.X^j}X^jY^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lR_{jlik} \\
= & (-1)^{i.j+l.i+(1+l).k}(-1)^{Y^i.j}X^jY^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lR_{jlik}
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\iota(\dot\gamma,\iota(\dot\gamma,X,Y)R)g+(-1)^{(X+1).Y}\iota(\dot\gamma,\iota(Y,\dot\gamma,X)R)g-(-1)^{X+Y}\iota(\dot\gamma,\iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}(T))g$$
$$=(-1)^{(1+l).k}(-1)^{Y^i.j}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}((-1)^{(j+k+l).i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{(i+l).(k+j)+l.j}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm}-$$
$$(-1)^{(j+l).k}\Gamma^m_{jl}\Gamma_{ikm})$$

On peut remarquer que :

$$\begin{aligned}
&(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}\Gamma^m_{ij}\Gamma_{lkm}\\
=\;&(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+m.(p+l+k)}\Gamma^m_{ij}\Gamma^p_{lk}g_{pm}\\
=\;&(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+p.(p+l+k)+p.m}\Gamma^m_{ij}g_{mp}\Gamma^p_{lk}\\
=\;&(-1)^{(i+j).(l+k)+l.k+p.(p+l+k+i+j)}\Gamma_{ijp}\Gamma^p_{lk}\\
=\;&(-1)^{l.k}\Gamma^p_{lk}\Gamma_{ijp}
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\iota(\dot\gamma,\iota(\dot\gamma,X,Y)R)g+(-1)^{(X+1).Y}\iota(\dot\gamma,\iota(Y,\dot\gamma,X)R)g-(-1)^{X+Y}\iota(\dot\gamma,\iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}(T))g$$
$$=(-1)^{(1+l).k}(-1)^{Y^i.j}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}((-1)^{(j+k+l).i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{(i+l).(k+j)+l.j}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm}-$$
$$(-1)^{i.(j+l)}\Gamma^m_{ik}\Gamma_{jlm})$$

Puisque $(\nabla_k(g))_{ij}=-\omega^1_{kijk}$, on a :

$$\begin{aligned}
&-(-1)^Y\iota(X,\nabla_{\dot\gamma}Y)\nabla_{\dot\gamma}(g)\\
=\;&(-1)^{Y+(Y^i+1).j+(k+1).(i+j)}X^jD_c(Y^i)u^k_{(1)}\omega^1_{kij}+(-1)^{Y+Y^i+(Y^i+1+i+m).j+(k+1).(j+m)}X^jY^iu^l_{(1)}\Gamma^m_{il}u^k_{(1)}\omega^1_{kmj})\\
=\;&(-1)^{Y^i.(j+1)+k.(i+j)}X^jD_c(Y^i)u^k_{(1)}\omega^1_{kij}+(-1)^{Y^i.j+k+1+(i+m).j+k.(i+j)}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\Gamma^m_{il}\omega^1_{kmj}
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{\dot\gamma})^2Y\\
=\;&u^k_{(s+2)}\frac{\partial Y^i}{\partial u^k_{(s)}}\partial_i+(-1)^{k+s+1}u^k_{(s+1)}u^l_{(r+1)}\frac{\partial^2Y^i}{\partial u^l_{(r)}\partial u^k_{(s)}}\partial_i+(-1)^{Y^i+1}u^k_{(s+1)}\frac{\partial Y^i}{\partial u^k_{(s)}}u^l_{(1)}\Gamma^m_{il}\partial_m\\
&+(-1)^{Y^i.k}u^k_{(2)}Y^i\Gamma^j_{ik}\partial_j+(-1)^{Y^i.k+k+1}u^k_{(1)}u^l_{(s+1)}\frac{\partial Y^i}{\partial u^l_{(s)}}\Gamma^j_{ik}\partial_j\\
&+(-1)^{Y^i.(k+l)+k+1}u^k_{(1)}u^l_{(1)}Y^i\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u^l}\partial_j+(-1)^{Y^i.(k+l)+k+1+l.(i+j+k)}u^k_{(1)}u^l_{(1)}Y^i\Gamma^j_{ik}\Gamma^m_{jl}\partial_m\\
=\;&(D_c)^2(Y^i)\partial_i+(-1)^{Y^i.k}u^k_{(2)}Y^i\Gamma^j_{ik}\partial_j+(-1)^{k+1}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u^l}\partial_j\\
&+(-1)^{k+1+l.(i+j+k)}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\Gamma^m_{ik}\Gamma^j_{ml}\partial_j\\
=\;&(D_c)^2(Y^i)\partial_i+(-1)^{Y^i.k}u^k_{(2)}Y^i\Gamma^j_{ik}\partial_j+(-1)^{k+1}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}(\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u^l}-(-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial u^k})\partial_j-\\
&(-1)^{k+1}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}((-1)^{l.(i+m+k)}\Gamma^m_{ik}\Gamma^j_{ml}-(-1)^{k.(i+m)}\Gamma^m_{il}\Gamma^j_{mk})\partial_j
\end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned}
& \iota(X,(\nabla_{\dot\gamma})^2Y)g \\
= \; & (-1)^{Y^i.j}X^j(D_c)^2(Y^i)g_{ij}+(-1)^{(Y^i+k).j+Y^i.k}X^ju^k_{(2)}Y^i\Gamma_{ikj} \\
& +(-1)^{(Y^i+k).j}(-1)^{k+1}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}(\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.(k+l)+k.l}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k}) \\
& -(-1)^{(Y^i+i).j}(-1)^{k+1}(-1)^{(i+k).l}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}(\Gamma^m_{ik}\Gamma_{jlm}-(-1)^{l.k+i.(l+k)}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm}) \\
& +(-1)^{Y^i.j}(-1)^{k+1}(-1)^{l.k+j.(i+m)}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}((-1)^{(i+j).l}\Gamma^m_{ik}\omega^1_{lmj}-(-1)^{k.(i+j+l)}\Gamma^m_{il}\omega^1_{kmj})
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
& \iota(X)\nabla_{\dot\gamma}(\iota(\nabla_{\dot\gamma}Y)g) \\
= \; & \iota(X,(\nabla_{\dot\gamma})^2Y)g-(-1)^Y\iota(X,\nabla_{\dot\gamma}Y)\nabla_{\dot\gamma}(g) \\
= \; & (-1)^{Y^i.j}X^j(D_c)^2(Y^i)g_{ij}+(-1)^{Y^i.(j+1)+k.(i+j)}X^jD_c(Y^i)u^k_{(1)}\omega^1_{kij}+(-1)^{(Y^i+k).j+Y^i.k}X^j \\
& u^k_{(2)}Y^i\Gamma_{ikj}+(-1)^{(Y^i+k).j}(-1)^{k+1}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}(\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.(k+l)+k.l}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k}) \\
& -(-1)^{(Y^i+i).j}(-1)^{k+1}(-1)^{(i+k).l}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}(\Gamma^m_{ik}\Gamma_{jlm}-(-1)^{l.k+i.(l+k)}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm})
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
& \iota(X)\nabla_{\dot\gamma}(\iota(\nabla_{\dot\gamma}Y)g)+\iota(\dot\gamma,\iota(\dot\gamma,X,Y)R+(-1)^{(X+1).Y}\iota(Y,\dot\gamma,X)R \\
& -(-1)^{X+Y}\iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}(T))g \\
= \; & (-1)^{Y^i.j}X^j(D_c)^2(Y^i)g_{ij}+(-1)^{Y^i.(j+1)+k.(i+j)}X^jD_c(Y^i)u^k_{(1)}\omega^1_{kij}+(-1)^{(Y^i+k).j+Y^i.k}X^j \\
& u^k_{(2)}Y^i\Gamma_{ikj}+(-1)^{(Y^i).j}(-1)^{k.(l+1)}X^jY^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}((-1)^{j.l}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k}-(-1)^{(j+l).k}\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l} \\
& +(-1)^{(j+k+l).i}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j})
\end{aligned}$$

Or on a pour l'ordre 2 homogène :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{Y^i.(j+s)+(i+j).s}X^jY^i_{(s)}\omega^s_{ij}=(-1)^{Y^i.j}X^jY^i_{(2)}\omega^2_{ij}+(-1)^{Y^i.(j+1)+(i+j).k}X^jY^i_{(1)}u^k_{(1)}\omega^1_{kij} \\
& +(-1)^{(Y^i+k).j}X^jY^iu^k_{(2)}\omega^0_{ikj}+(-1)^{Y^i.j}X^jY^i(-1)^{(i+j).l+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}((-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k}- \\
& (-1)^{j.k+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.k+i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j)+l.j}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i})
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.36. — *Si ∇ est compatible avec la métrique g, alors*

$$\iota(X,Y)\omega=\int_{\mathbb{S}^{1|1}}\iota(X,(\nabla)_{\ddot\gamma}Y)g-\iota(\dot\gamma,\iota(X,Y)\nabla_{\dot\gamma}T)g+\iota(X,(\nabla_1)_{\ddot\gamma}Y)g_1\theta$$

La proposition suivante, qui est plus une remarque qu'une vraie proposition, fait le lien entre le classique et le super.

Proposition 3.37. — *On peut identifier les formes symplectiques homogènes locales d'ordre* 1 *avec la partie dépendant explicitement de* θ *càd* $\int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X, (\nabla_1)_{\ddot{\gamma}})g_1\theta$ *des formes symplectiques homogènes locales d'ordre* 2.

3.5. Formes locales homogènes d'ordre 3

Pour les formes symplectiques homogènes d'ordre 3, nos calculs n'ont pas abouti. L'on donne alors simplement quelques résultats pour donner un aperçu, d'une part de l'effort calculatoire que cela représente et d'autre part, une idée des structures géométriques qui interviennent.

D'après les résultats du cas général et par analogie avec le cas classique, on peut espérer obtenir une classification des formes symplectiques locales homogènes d'ordre 3 à l'aide de formes presque symplectiques et de connexions symplectiques sur la variété M.

L'on termine cette section en donnant un exemple simple de forme locale homogène d'ordre 3.

3.5.1. Connexion symplectique sur une supervariété. —

Soit M une supervariété munie d'une forme presque symplectique ω, càd que ω est simplement une 2-forme non dégénérée sur M.

Une connexion est dite symplectique si elle est compatible avec ω càd si $\nabla_k\omega = \nabla_k(du^i \otimes du^j\omega_{ij}) = 0$, $\forall k$. Explicitons cette relation en coordonnées, on a :

$\nabla_k(du^i \otimes du^j\omega_{ij})$
$= -(-1)^{l.k}du^l\Gamma^i_{lk} \otimes du^j\omega_{ij} - (-1)^{(i+l).k}du^i \otimes du^l\Gamma^j_{lk}\omega_{ij} + (-1)^{k.(i+j)}du^i \otimes du^j\partial_k(\omega_{ij})$
$= -(-1)^{i.k+j.(i+k+l)}du^i \otimes du^j\Gamma^l_{ik}\omega_{lj} - (-1)^{(i+j).k}du^i \otimes du^j\Gamma^l_{jk}\omega_{il} + (-1)^{k.(i+j)}du^i \otimes du^j\partial_k(\omega_{ij})$

L'abaissement des indices se fait maintenant au moyen de la forme symplectique et non plus au moyen de la métrique. Les coefficients de Christoffel covariants sont ainsi définis par la même formule que dans le cas riemanien, càd :

$$\Gamma_{ijk} = (-1)^{(i+j+l).k}\Gamma^l_{ij}\omega_{lk}$$

Proposition 3.38. — *Une connexion* ∇ *donnée par ses coefficients de Christoffel* Γ^k_{ij} *est compatible avec la forme symplectique* $\omega = du^i du^j\omega_{ij}$ *ssi :*

$$\partial_k(\omega_{ij}) = (-1)^{j.k}\Gamma_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)}\Gamma_{jki}$$

Pour des résultats détaillés sur les connexions symplectiques, on renvoie à [**BCG**$^+$**06**] et [**BC99**].

Puisque plusieurs connexions symplectiques apparaissent dans les équations qui suivent, on peut citer la proposition suivante :

Proposition 3.39. — *Soit M une variété symplectique. L'espace des connexions symplectiques est un espace affine de direction l'espace vectoriel des 3-tenseurs covariants complètement symétriques de M.*

Autrement dit, la différence des coefficients de Christoffel covariants de deux connexions symplectiques est un 3-tenseur covariant complètement symétrique.

En reprenant la démonstration du cas riemanien, on voit que les coefficients de Christoffel covariants se transforment selon :

(3.5.1)
$$\Gamma'_{mno} = (-1)^{k.(i+j+m+n)+j.(i+m)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^o}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\Gamma_{ijk} + (-1)^{(m+n+i).o}\frac{\partial^2 u^i}{\partial u'^n \partial u'^m}\frac{\partial u^j}{\partial u'^o}\omega_{ij}$$

La torsion et la courbure d'une connexion sont définies comme la torsion et la courbure d'une connexion habituelle.

Et on a toujours les formules :

$$T_{ijk} = \Gamma_{ijk} - (-1)^{i.j}\Gamma_{jik}$$

Et dans le cas d'une connexion symplectique :

$$R_{ijkl} = (-1)^{k.l}\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} - (-1)^{l.k}\Gamma^m_{lk}\Gamma_{ijm} + (-1)^{(l+k).j}\Gamma^m_{lj}\Gamma_{ikm}$$

Où l'on a utilisé l'équivalent de la relation 3.4.2, qui dans le cas symplectique devient :

$$\Gamma^m_{ij}\Gamma_{lkm} = -(-1)^{(i+j).(l+k)}\Gamma^m_{lk}\Gamma_{ijm} \tag{3.5.2}$$

Il suffit de reprendre la démonstration du cas riemanien et d'utiliser l'antisymétrie de la forme ω_{ij} à la place de la symétrie de la métrique.

On pourra donc remarquer les changements de signe dans l'expression :

$$R_{ijkl} = (-1)^{k.l}\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - (-1)^{j.(k+l)}\frac{\partial \Gamma_{ikl}}{\partial u^j} + (-1)^{(i+j).(l+k)+l.k}\Gamma^m_{ij}\Gamma_{lkm} - (-1)^{(i+k).(l+j)+(l+k).j}\Gamma^m_{ik}\Gamma_{ljm}$$

ceci étant du au fait que l'on a :

(3.5.3)
$$\frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial u^k} = (-1)^{(i+j+m).l}\frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial u^k}g_{ml} + (-1)^{(i+j+m).(l+k)}\Gamma^m_{ij}((-1)^{l.k}\Gamma_{mkl} - (-1)^{m.(l+k)}\Gamma_{lkm})$$

3.5.2. Formes locales homogènes d'ordre 3. —

Définition 57. — *Soit M une supervariété. Une forme locale homogène d'ordre 3 s'écrit :*

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.(j)}X^j((-1)^{Y^i+(i+j)}Y^i_{(3)}\omega^3_{ij} + Y^i_{(2)}\omega^2_{ij} + (-1)^{Y^i+(i+j)}Y^i_{(1)}\omega^1_{ij} + Y^i\omega^0_{ij})$$

avec

$\omega^3_{ij} = \omega^3_{ij}(x, \theta, u^i)$

$$\omega^2_{ij} = (-1)^{(k+1).(i+j)+i.k} u^k_{(1)} \omega^2_{ikj}(x,\theta,u^i)$$
$$\omega^1_{ij} = (-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k} \frac{1}{2} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \omega^1_{lkij}(x,\theta,u^i) + (-1)^{j.k} u^k_{(2)} \omega^1_{ikj}(x,\theta,u^i)$$
$$\omega^0_{ij} = (-1)^{(k+l+m+1).(i+j)+(l+m).k+(m+1).l} \frac{1}{6} u^k_{(1)} u^l_{(1)} u^m_{(1)} \omega^0_{mlkij}(x,\theta,u^i)$$
$$+(-1)^{(k+l+1).(i+j)+(l+1).k} u^k_{(2)} u^l_{(1)} \omega^0_{lkij}(x,\theta,u^i) + (-1)^{(i+j).(k+1)+i.k} u^k_{(3)} \omega^0_{ikj}(x,\theta,u^i)$$

tels que :

$\omega^1_{lkij} = -(-1)^{l.k} \omega^1_{lkij}$
et
$\omega^0_{mlkij} = -(-1)^{l.m} \omega^0_{lmkij} = -(-1)^{k.l} \omega^0_{mklij}$

Proposition 3.40. — *La condition d'antisymétrie impose aux coefficients de vérifier les relations suivantes :*

$$\partial_c(\omega^3_{ij}) = 0$$
$$\partial_x(\omega^2_{ikj}) = 0$$
$$\partial_c(\omega^1_{ikj}) = 0$$
$$\partial_c(\omega^1_{lkij}) = 0$$
$$\omega^3_{ij} = -(-1)^{i.j} \omega^3_{ji}$$
$$(-1)^{j.k} \omega^2_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)} \omega^2_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$
$$(-1)^{j.k} \omega^1_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)} \omega^1_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$
$$\omega^1_{lkij} = (-1)^{i.j} \omega^1_{lkji}$$
$$\omega^0_{mlkij} + (-1)^{i.j} \omega^0_{mlkji} = (-1)^{m.(i+j+k+l)} \frac{\omega^1_{lkij}}{\partial u^m} + (-1)^{l.(i+j+k)} \frac{\omega^1_{mkij}}{\partial u^l} + (-1)^{k.(i+j)} \frac{\omega^1_{mlij}}{\partial u^k}$$
$$\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j} \omega^0_{lkji} = \omega^1_{lkij} + (-1)^{i.l+k.(i+j)} \frac{\partial \omega^2_{ilj}}{\partial u^k} - (-1)^{(k+l).(i+j)+l.k} \frac{\partial^2 \omega^3_{ij}}{\partial u^l \partial u^k} + (-1)^{l.(i+j)+(i+l).k} \frac{\partial \omega^1_{ikj}}{\partial u^l}$$
$$(-1)^{i.k} \omega^0_{ikj} + (-1)^{(i+k).j} \omega^0_{jki} = (-1)^{i.k} \omega^1_{ikj} + (-1)^{i.k} \omega^2_{ikj} - (-1)^{(i+j).k} \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

Démonstration. —

Les conditions d'antisymétrie s'écrivent :
$\omega^3_{ij} = -(-1)^{i.j} \omega^3_{ji}$
$\omega^2_{ij} = (-1)^{i.j} (\omega^2_{ji}) - (-1)^{i+j+i.j} (\omega^3_{ji})_{(1)}$
$\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j} (\omega^1_{ji} - (\omega^3_{ji})_{(2)})$
$\omega^0_{ij} = -(-1)^{i.j} (\omega^0_{ji} - (-1)^{i+j} (\omega^1_{ji})_{(1)} - (\omega^2_{ji})_{(2)} + (-1)^{i+j} (\omega^3_{ji})_{(3)})$
Ou encore :

$(-1)^{(i+j).(k+1)+i.k} u^k_{(1)} \omega^2_{ikj} - (-1)^{i.j} (-1)^{(i+j).(k+1)+j.k} u^k_{(1)} \omega^2_{jki} = (-1)^{i+j} \partial_c(\omega^3_{ij}) + (-1)^{i+j} u^k_{(1)} \dfrac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$

Ce qui implique :

$$\partial_c(\omega^3_{ij}) = 0$$

$$(-1)^{j.k}\omega^2_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)}\omega^2_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

Les termes en ω^1 donnent :

$$(-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\omega^1_{lkij} + (-1)^{j.k}u^k_{(2)}\omega^1_{ikj} =$$

$$(-1)^{i.j}(-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\omega^1_{lkji} + (-1)^{i.(j+k)}u^k_{(2)}\omega^1_{jki} + u^k_{(2)}\frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

Et ainsi :

$$\omega^1_{lkij} = (-1)^{i.j}\omega^1_{lkji}$$

$$(-1)^{j.k}\omega^1_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)}\omega^1_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

Et enfin , à l'aide de l'avant-dernière équation, la dernière peut s'écrire :

$$\omega^0_{ij} = -(-1)^{i.j}\omega^0_{ji} + (-1)^{i+j}(\omega^1_{ij})_{(1)} + (\omega^2_{ij})_{(2)} - (-1)^{i+j}(\omega^3_{ij})_{(3)}$$

De plus, on a :

$$(\omega^3_{ij})_{(3)} = u^k_{(3)}\frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k} + (-1)^k u^k_{(2)}u^l_{(1)}\frac{\partial^2 \omega^3_{ij}}{\partial u^l \partial u^k}$$

$$(\omega^2_{ij})_{(2)} = (-1)^{(k+1).(i+j)+i.k}u^k_{(1)}\partial_x(\omega^2_{ikj}) + (-1)^{(k+1).(i+j)+i.k}u^k_{(3)}\omega^2_{ikj} + (-1)^{(l+1).(i+j+k)+i.l}u^k_{(2)}u^l_{(1)}\frac{\partial \omega^2_{ilj}}{\partial u^k}$$

et

$$(\omega^1_{ij})_{(1)} = (-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k+l+k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\partial_c(\omega^1_{lkij}) + (-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k}u^k_{(2)}u^l_{(1)}\omega^1_{lkij} + (-1)^{(j+1).k}u^k_{(2)}\partial_c(\omega^1_{ikj}) + (-1)^{j.k}u^k_{(3)}\omega^1_{ikj} + (-1)^{(k+l).(i+j)+(l+1).k+l+k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\omega^1_{lkij}}{\partial u^m} + (-1)^{j.k+k}u^k_{(2)}u^l_{(1)}\frac{\partial \omega^1_{ikj}}{\partial u^l}$$

Et par identification, on a les résultats.

□

A l'aide des relations de changements de variables et des relations d'antisymétrie, on peut identifier les objets géométriques suivants.

Proposition 3.41. —
(i) *Les coefficients ω^3_{ij} sont les coefficients d'une forme presque symplectique sur M.*
(ii) *Les coefficients $(\omega^2_{ikj})_0$ et ω^1_{ikj} sont les coefficients de Christoffel covariants de connexions symplectiques sur M.*

La condition de fermeture s'écrit :

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& (-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).k+i+j}Y^jZ^i_{(3)}\frac{\partial\omega^3_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{Y.(k)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{i+j+k}Y^jZ^i_{(3)}\frac{\partial\omega^3_{ik}}{\partial u^j}\\
&+(-1)^{Z.(k+j+1)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(3)}Z^i\frac{\partial\omega^3_{jk}}{\partial u^i} + (-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k)}Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k}\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}D_c(Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})\\
&-(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}(Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^Y(-1)^{Z^i}Y^j_{(1)}Z^i_{(2)}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j_{(1)}})\\
&+(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}(Y^j_{(2)}Z^i\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i} + (-1)^ZY^j_{(2)}Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i_{(1)}})\\
&+(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).k+i+j}Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k)+i+j}D^2_c(Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(2)}})\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.(j+1)}(-1)^{(Y^j+Z^i+1).(k+1)+i+j}D^1_c(Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})\\
&-(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{i+j+k}Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j} - (-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k)}(-1)^{i+j+k+1}Y^j_{(1)}Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j_{(1)}}\\
&-(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(-1)^{i+j+k}Y^j_{(2)}Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j_{(2)}} + (-1)^{Z.(k+j+1)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i}\\
&+(-1)^{Z.(k+j)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i_{(1)}} + (-1)^{Z.(k+j+1)+j+k}(-1)^{Y^j.(k+1)}Y^j_{(1)}Z^i_{(2)}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i_{(2)}}\\
&+(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).k}Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{Z^i.j)}(-1)^{(Y^j+Z^i).k}D^2_c(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2)}})\\
&-(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}D^1_c(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}})\\
&+(-1)^k(-1)^{Z^i.j}(-1)^{(Y^j+Z^i).(k+1)}D^3_c(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}})\\
&-(-1)^{Y.k}(-1)^{Z^i.(j+k)}(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + Y^j_{(2)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(2)}}) - (-1)^{Y.(k+1)}(-1)^{Z^i.(j+k+1)}(Y^j_{(1)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(1)}}\\
&+Y^j_{(3)}Z^i\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(3)}})\\
&+(-1)^{Z.(k+j)}(-1)^{Y^j.k}(Y^jZ^i\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i} + Y^jZ^i_{(2)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(2)}}) + (-1)^{Z.(k+j+1)}(-1)^{Y^j.k}(Y^jZ^i_{(1)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(1)}}\\
&+Y^jZ^i_{(3)}\frac{\partial\omega^0_{jk}}{\partial u^i_{(3)}})
\end{aligned}
$$

Proposition 3.42. — *La condition de fermeture impose aux coefficients les relations suivantes*

$$\partial_c(\omega^2_{ikj}) = 0$$
$$\partial_c(\omega^0_{ikj}) = 0$$
$$\partial_c(\omega^0_{klij}) = 0$$
$$\partial_c(\omega^0_{mlkij}) = 0$$
$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^3_{jk}}{\partial u^i} - \omega^0_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} = 0$$
$$\omega^2_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^2_{ikj} + (-1)^{i.j}\omega^1_{jik} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} = 0$$
$$(-1)^{i.(k+j+l)+l.k}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\omega^0_{lkij} + (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{i.j}(-1)^{l.(i+j+k)}\omega^0_{ljik} = 0$$
$$(-1)^{k.(i+j)}\omega^1_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^1_{ljik} + \omega^1_{lijk} = 0$$
$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^1_{mljk}}{\partial u^i} - (-1)^{k.(i+j)}\omega^0_{mlkij} - (-1)^{i.j}\omega^0_{mljik} = 0$$
$$(-1)^{i.(j+k+l)}(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega^1_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{(k+l).(i+j)}\omega^0_{klij} + (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{(j+l).i+l.k)}\omega^0_{jlik} = 0$$
$$\frac{\partial\omega^0_{nmlij}}{\partial u^k} - (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{nmlik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^0_{nmljk}}{\partial u^i} - (-1)^{n.(i+j+l+m)+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^0_{mlkij}}{\partial u^n} + (-1)^{m.(i+j+k+l)+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^0_{nlkij}}{\partial u^m} - (-1)^{l.(i+j+k)+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^0_{nmkij}}{\partial u^l} = 0$$
$$(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.k+l.(i+j+k)}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{j.k}(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}(-1)^{j.l}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i} = (-1)^{k.(i+j)}\omega^0_{lkij} + \omega^0_{klij}$$

Démonstration. — Comme précédemment, on regroupe les termes suivant les $Y_{(r)}Z_{(s)}$.

Les termes en $Y_{(3)}Z$ donnent :

$$(-1)^{i.(k+j)+i+j+k}\frac{\partial\omega^3_{jk}}{\partial u^i} - (-1)^{j.(k+1)}\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(3)}} + (-1)^k\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}} = 0$$

Et puisque $\dfrac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}} = (-1)^{(i+j).(k+1)+i.k}\omega^0_{ikj}$ ainsi :

$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^3_{jk}}{\partial u^i} - \omega^0_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} = 0$$

Les termes en $Y_{(1)}Z_{(2)}$ donnent :

$$-(-1)^k\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k_{(1)}} - (-1)^{j.(k+1)}\frac{\partial\omega^2_{ik}}{\partial u^j_{(1)}} + (-1)^{i.(k+j+1)+j+k}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i_{(2)}} + (-1)^k\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}} = 0$$

Ou encore :

$$\omega^2_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^2_{ikj} = (-1)^{i.j}\omega^1_{jik} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}$$

Les termes en $Y_{(2)}Z$ donnent :

$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^2_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2)}}+(-1)^k D_c(\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}}))-(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(2)}}=0$$

Ou encore :

$$(-1)^{i.(k+j)+(i+k).l}u^l_{(1)}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}u^l_{(1)}\omega^0_{lkij}+(-1)^{j.k}(\partial_c(\omega^0_{ikj})+u^l_{(1)}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l})$$
$$-(-1)^{j.k}(-1)^{(j+l).(i+k)+l.j}u^l_{(1)}\omega^0_{ljik}=0$$

On en tire alors les deux relations suivantes :

$$\partial_c(\omega^0_{ikj})=0$$

et

$$(-1)^{i.(k+j+l)+l.k}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\omega^0_{lkij}+(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{i.j}(-1)^{l.(i+j+k)}\omega^0_{ljik}=0$$

De la première et à l'aide des relations d'antisymétrie, on a : $\partial_c(\omega^2_{ikj})=0$.

Maintenant, on regarde les termes en $Y_{(1)}Z_{(1)}$:

$$(-1)^{i+j}\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}-(-1)^{j.(k+1)}(-1)^{i+j+k+1}\frac{\partial\omega^1_{ik}}{\partial u^j_{(1)}}+(-1)^{i.(k+j)+j+k}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i_{(1)}}=0$$

Ou encore :

$$(-1)^{k.(i+j)}\omega^1_{lkij}+(-1)^{i.j}\omega^1_{ljik}+\omega^1_{lijk}=0$$

On regarde les termes en $Y_{(1)}Z$:

$$(-1)^{i.(k+j+1)+j+k}\frac{\partial\omega^1_{jk}}{\partial u^i}-(-1)^k\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}+(-1)^k D^2_c(\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}})-(-1)^{j.(k+1)}\frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j_{(1)}}=0$$

Ou encore :

$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial\omega^1_{mljk}}{\partial u^i}-(-1)^{k.(i+j)}\omega^0_{mlkij}-(-1)^{i.j}\omega^0_{mljik}=0$$

et

$$(-1)^{i.(j+k+l)}(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega^1_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{(k+l).(i+j)}\omega^0_{klij}+(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{(j+l).i+l.k)}\omega^0_{jlik}=0$$

où on a utilisé $\frac{\partial\omega^1_{ij}}{\partial u^k}=(-1)^{(l+m).(i+j+k)+(m+1).l}\frac{1}{2}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\frac{\partial\omega^1_{mlij}}{\partial u^k}+(-1)^{(j+k).l}u^l_{(2)}\frac{\partial\omega^1_{ilj}}{\partial u^k}$

et

$$\frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}=(-1)^{(k+l+m+1).(i+j)+(l+m).k+(m+1).l}\frac{1}{2}u^l_{(1)}u^m_{(1)}\omega^0_{mlkij}+(-1)^{(k+l+1).(i+j)}u^l_{(2)}\omega^0_{klij}$$

Enfin, on regarde les termes en YZ.

$$\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k} - D_c^2(\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(2)}}) - (-1)^k D_c(\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(1)}}) + (-1)^k D_c^3(\frac{\partial \omega^0_{ij}}{\partial u^k_{(3)}}) - (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial \omega^0_{jk}}{\partial u^i} = 0$$

qui implique les résultats en développant les termes.

□

3.5.3. Un exemple de forme locale homogène d'ordre 3. —

Afin de donner un aperçu des formes locales homogènes d'ordre 3, l'on cherche à déterminer un exemple le plus simple possible de forme locale homogène d'ordre 3. On peut déjà supposer que tous les coefficients sont indépendants de x et θ. On note ω la forme presque symplectique sur M de coefficients ω_{ij}.

De plus, en regardant les formules de transformations lors de changements de coordonnées, on peut déjà estimer quels termes peuvent être identiquement nuls.

D'après la proposition 3.7, on a :

$$\omega'^1_{kl} = (-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k}\omega^1_{ij} + (\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2)}\omega^3_{ij})$$

Et puisque, $(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2)} = v^m_{(2)}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^m \partial v^k}$, on peut supposer que les coefficients ω^1_{lkij} sont tous nuls.

On a aussi :

$$\omega'^0_{kl} = (-1)^{(i+k).j}\frac{\partial u^j}{\partial v^l}((\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2t-2s)}\omega^0_{ij} + (-1)^{k+j}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(1)}\omega^1_{ij} + (\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(2)}\omega^2_{ij} + (-1)^{k+j}(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(3)}\omega^3_{ij})$$

Et puisque $(\frac{\partial u^i}{\partial v^k})_{(3)} = v^m_{(3)}\frac{\partial^2 u^i}{\partial v^m \partial v^k} + (-1)^m v^m_{(2)} v^n_{(1)}\frac{\partial^3 u^i}{\partial v^n \partial v^m \partial v^k}$

On peut supposer que les coefficients ω^0_{mlkij} sont tous nuls.

On obtient alors les équations suivantes :

$$\omega^3_{ij} = -(-1)^{i.j}\omega^3_{ji}$$

$$(-1)^{j.k}\omega^2_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)}\omega^2_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

$$(-1)^{j.k}\omega^1_{ikj} - (-1)^{i.(j+k)}\omega^1_{jki} = \frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\omega^2_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^2_{ikj} = (-1)^{i.j}\omega^1_{jik} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}$$

$$(-1)^{i.(k+j)}\frac{\partial \omega^3_{jk}}{\partial u^i} - \omega^0_{ijk} + (-1)^{j.k}\omega^0_{ikj} = 0$$

$$(-1)^{i.k}\omega^0_{ikj} + (-1)^{(i+k).j}\omega^0_{jki} = (-1)^{i.k}\omega^1_{ikj} + (-1)^{i.k}\omega^2_{ikj} - (-1)^{(i+j).k}\frac{\partial \omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\omega^0_{lkij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{lkji} = (-1)^{i.l+k.(i+j)}\frac{\partial \omega^2_{ilj}}{\partial u^k} - (-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\frac{\partial^2 \omega^3_{ij}}{\partial u^l \partial u^k} + (-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial \omega^1_{ikj}}{\partial u^l}$$

$$(-1)^{i.(k+j+l)+l.k}\frac{\partial \omega^2_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\omega^0_{lkij} + (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{i.j}(-1)^{l.(i+j+k)}\omega^0_{ljik} = 0$$

$$(-1)^{i.(j+k+l)}(-1)^{k.l}\frac{\partial \omega^1_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{(k+l).(i+j)}\omega^0_{klij} + (-1)^{j.k}\frac{\partial \omega^0_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{(j+l).i+l.k)}\omega^0_{jlik} = 0$$

$$(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{j.k+l.(i+j+k)}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.k}(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j)}(-1)^{j.l}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i}= (-1)^{k.(i+j)}\omega^0_{lkij}+\omega^0_{klij}$$

Les trois premières équations sont résumées dans la proposition 3.41. Puisque les coefficients ω^2_{ijk} sont les coefficients de Christoffel d'une connexion symplectique, l'on va supposer que celle-ci est la plus simple possible, càd sans torsion ni courbure. De plus, on suppose que $\forall i, jk,\ \omega^2_{ijk}=\omega^1_{ijk}$. La troisième équation disparait alors, la quatrième devient $\omega^2_{ikj}=(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}$ et implique alors la cinquième et la sixième. Le système d'équations précédentes devient alors :

$$\omega^3_{ij}=-(-1)^{i.j}\omega^3_{ji}$$

$$(-1)^{j.k}\omega^2_{ikj}-(-1)^{i.(j+k)}\omega^2_{jki}=\frac{\partial\omega^3_{ij}}{\partial u^k}$$

$$\omega^2_{ikj}=(-1)^{j.k}\omega^0_{ikj}$$

$$\omega^0_{lkij}+(-1)^{i.j}\omega^0_{lkji}=(-1)^{i.l+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^k}-(-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\frac{\partial^2\omega^3_{ij}}{\partial u^l\partial u^k}+(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}$$

$$(-1)^{i.(k+j+l)+l.k}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{(k+l).(i+j)+l.k}\omega^0_{lkij}+(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{i.j}(-1)^{l.(i+j+k)}\omega^0_{ljik}=0$$

$$(-1)^{i.(j+k+l)}(-1)^{k.l}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{(k+l).(i+j)}\omega^0_{klij}+(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{(j+l).i+l.k)}\omega^0_{jlik}=0$$

$$(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{j.k+l.(i+j+k)}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.k}(-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j}+(-1)^{i.(k+j)}(-1)^{j.l}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i}= (-1)^{k.(i+j)}\omega^0_{lkij}+\omega^0_{klij}$$

Proposition 3.43. —
Soit M une supervariété. Soit ω une forme presque symplectique sur M et ∇ une connexion symplectique de torsion et de courbure nulle. Alors l'application Ω telle que :

$$\forall X,Y\in TSLM,\quad \iota(X,Y)\Omega=\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(X,(\nabla_{\dot\gamma})^3Y)\omega$$

est une forme symplectique sur SLM homogène d'ordre 3.

Démonstration. — La deuxième équation permet d'écrire :

$$(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^2_{jki}}{\partial u^l}=\frac{\partial^2\omega^3_{ij}}{\partial u^l\partial u^k}=(-1)^{(j+k).l}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^j}-(-1)^{i.(j+l)+k.l}\frac{\partial\omega^2_{jli}}{\partial u^k}$$

on obtient ainsi la relation :

$$(-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^2_{jki}}{\partial u^l}=(-1)^{(j+k).l}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^j}-(-1)^{i.(j+l)+k.l}\frac{\partial\omega^2_{jli}}{\partial u^k}\tag{3.5.4}$$

On peut alors vérifier que :

$$\omega^0_{lkij}=\frac{1}{2}((-1)^{i.l+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}+(-1)^{j.(i+k+l)}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}-(-1)^{i.(l+k)}\frac{\partial\omega^2_{ilk}}{\partial u^j})$$

vérifie bien les quatre dernières équations.

En effet, on a :
$\omega^0_{lkij}+(-1)^{i.j}\omega^0_{lkji}=\frac{1}{2}((-1)^{i.l+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}+(-1)^{j.(i+l)+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{jli}}{\partial u^k}+$
$(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k+i.j}\frac{\partial\omega^2_{jki}}{\partial u^l})$

Et en remplaçant $\frac{\partial^2\omega^3_{ij}}{\partial u^l\partial u^k}$, à l'aide de 3.5.4 par $\frac{1}{2}((-1)^{i.l+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}-$
$(-1)^{j.(i+l)+k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{jli}}{\partial u^k}-(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k+i.j}\frac{\partial\omega^2_{jki}}{\partial u^l})$, on voit que la première équation est bien vérifiée.

Pour la deuxième, on a :

$$\begin{aligned}\omega^0_{lkij}+(-1)^{(i+k).j+i.k}\omega^0_{ljik} &= \frac{1}{2}((-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}+(-1)^{j.(i+k+l)}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}+\\ &\quad (-1)^{(i+k).j+i.k}((-1)^{l.(i+k)+(i+l).j}\frac{\partial\omega^2_{ijk}}{\partial u^l}+(-1)^{k.(i+j+l)}\frac{\partial\omega^2_{klj}}{\partial u^i})\end{aligned}$$

Or d'après 3.5.4 et la torsion nulle, on a :

$$\begin{aligned}(-1)^{l.(i+k)+(i+l).j}\frac{\partial\omega^2_{ijk}}{\partial u^l}+(-1)^{k.(i+j+l)}\frac{\partial\omega^2_{klj}}{\partial u^i} &= (-1)^{l.(i+j+k)}\frac{\partial\omega^2_{jik}}{\partial u^l}+(-1)^{k.(i+j+l)}\frac{\partial\omega^2_{klj}}{\partial u^i}\\ &= (-1)^{l.(i+j+k)+j.(i+k)+j.k}\frac{\partial\omega^2_{kij}}{\partial u^l}+(-1)^{k.i+j.l}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}\\ &= (-1)^{l.(i+j+k)+j.(i+k)+(i+j).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}+(-1)^{k.i+j.l}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\omega^0_{lkij}+(-1)^{(i+k).j+i.k}\omega^0_{ljik}=(-1)^{l.(i+j)+(i+l).k}\frac{\partial\omega^2_{ikj}}{\partial u^l}+(-1)^{j.(i+k+l)}\frac{\partial\omega^2_{jlk}}{\partial u^i}$$

càd que la deuxième équation est bien vérifiée.
On procède de même pour les deux dernières équations.

Ensuite, on peut d'abord remarquer que :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{i.(k+l)+k.l}R_{iklj} + (-1)^{k.(i+j)+i.j}R_{ljik} \\
= \;& (-1)^{i.(k+l)+k.l}((-1)^{j.l}\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{k.(j+l)}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k} - (-1)^{l.j}\Gamma^m_{jl}\Gamma_{ikm} + (-1)^{(l+j).k}\Gamma^m_{jk}\Gamma_{ilm}) \\
& +(-1)^{k.(i+j)+i.j}((-1)^{k.i}\frac{\partial\Gamma_{ljk}}{\partial u^i} - (-1)^{j.(i+k)}\frac{\partial\Gamma_{lik}}{\partial u^j} - (-1)^{i.k}\Gamma^m_{ki}\Gamma_{ljm} + (-1)^{(i+k).j}\Gamma^m_{kj}\Gamma_{lim})) \\
= \;& (-1)^{i.(k+l)+(j+k).l}\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{k.(j+i)+i.l}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.(k+i)}\frac{\partial\Gamma_{ljk}}{\partial u^i} - (-1)^{i.k}\frac{\partial\Gamma_{lik}}{\partial u^j} \\
& -(-1)^{i.(k+l)+(j+k).l}\Gamma^m_{jl}\Gamma_{ikm} + (-1)^{k.(j+i)+i.l}\Gamma^m_{jk}\Gamma_{ilm} - (-1)^{j.(k+i)}\Gamma^m_{ki}\Gamma_{ljm} + (-1)^{i.k}\Gamma^m_{kj}\Gamma_{lim} \\
= \;& (-1)^{i.(k+l)+(j+k).l}\frac{\partial\Gamma_{ikj}}{\partial u^l} - (-1)^{k.(j+i)+i.l}\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{j.(k+i+l)}\frac{\partial\Gamma_{jlk}}{\partial u^i} - (-1)^{i.(l+k)}\frac{\partial\Gamma_{ilk}}{\partial u^j} \\
& -2(-1)^{k.(j+l)+(i+j).l+i.j}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé 3.5.2 pour simplifier les derniers termes.

Dans le cas où la courbure et la torsion sont nulles, on a alors :

(3.5.5)
$$\frac{1}{2}((-1)^{(i+j+k).l}\frac{\partial\Gamma_{kij}}{\partial u^l} - (-1)^{k.(j+i)}\frac{\partial\Gamma_{lij}}{\partial u^k} + (-1)^{j.(k+i)}\frac{\partial\Gamma_{ljk}}{\partial u^i} - (-1)^{i.k}\frac{\partial\Gamma_{lik}}{\partial u^j}) = (-1)^{(k+j).l+i.j}\Gamma^m_{li}\Gamma_{kjm}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\omega^0_{lkij} = (-1)^{k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{lij}}{\partial u^k} + (-1)^{(k+j).l+i.j}\Gamma^m_{li}\Gamma_{kjm}$$

Et ainsi, l'application suivante :

(3.5.6)
$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}(-1)^{Y^i.j}X^j((-1)^{Y^i+i+j}Y^i_{(3)}\omega^3_{ij} + Y^i_{(2)}(-1)^{i+j+j.k}u^k_{(1)}\omega^2_{ikj} + (-1)^{Y^i+i+j+j.k}Y^i_{(1)}u^k_{(2)}\omega^2_{ikj} + Y^i(-1)^{i+j+j.k}u^k_{(3)}\omega^2_{ikj} + Y^i(-1)^{i+j+k+l.(j+k)}u^k_{(2)}u^l_{(1)}(\frac{\partial\omega^2_{ilj}}{\partial u^k} + (-1)^{(k+j).(i+l)}\Gamma^m_{il}\Gamma_{jkm})$$

est bien une forme symplectique sur SLM.

Maintenant, on a :

$$\nabla_{\dot\gamma}(Y) = D_c(Y^i)\partial_i + (-1)^{Y^i.k}u^k_{(1)}Y^i\Gamma^m_{ik}\partial_m$$

d'où

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot\gamma})^2Y = (D_c)^2(Y^i)\partial_i + (-1)^{Y^i.k}u^k_{(2)}Y^i\Gamma^j_{ik}\partial_j + (-1)^{k+1}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial u^l}\partial_j \\
+(-1)^{k+1+l.(i+m+k)}Y^iu^k_{(1)}u^l_{(1)}\Gamma^m_{ik}\Gamma^j_{ml}\partial_j
\end{aligned}$$

et ainsi :

$$
\begin{aligned}
& (\nabla_{\dot\gamma})^3 Y \\
= \; & (D_c)^3(Y^i)\partial_i + (-1)^{Y^i}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ik}^l\partial_l + (-1)^{Y^i}Y^iu_{(3)}^k\Gamma_{ik}^j\partial_j + D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ik}^j\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i.k+Y^i+k}u_{(2)}^kY^iu_{(1)}^l\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\partial_j + (-1)^{Y^i+k+l.(i+j+k)}Y^iu_{(2)}^ku_{(1)}^l\Gamma_{ik}^j\Gamma_{jl}^m\partial_m \\
& +(-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\partial_j + (-1)^{Y^i+k+1}Y^iu_{(2)}^ku_{(1)}^l\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\partial_j + (-1)^{Y^i}Y^iu_{(1)}^ku_{(2)}^l\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i+l+1}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m\frac{\partial^2\Gamma_{ik}^j}{\partial u^m\partial u^l}\partial_j + (-1)^{Y^i+m.(i+j+k+l)+l+1}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}\Gamma_{jm}^o\partial_o \\
& +(-1)^{k+1+l.(i+m+k)}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j\partial_j + (-1)^{Y^i+k+1+l.(i+m+k)}Y^iu_{(2)}^ku_{(1)}^l\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i+l.(i+m+k)}Y^iu_{(1)}^ku_{(2)}^l\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j\partial_j + (-1)^{Y^i+l+1+l.(i+n+k)}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m\frac{\partial\Gamma_{ik}^n}{\partial u^m}\Gamma_{nl}^j\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i+l+1+l.(i+n+k)+m.(i+k+n)}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m\Gamma_{ik}^n\frac{\partial\Gamma_{nl}^j}{\partial u^m}\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i+l+1+l.(i+n+k)+m.(i+j+k+l)}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m\Gamma_{ik}^n\Gamma_{nl}^j\Gamma_{jm}^o\partial_o \\
= \; & (D_c)^3(Y^i)\partial_i \\
& +(-1)^{Y^i}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\
& +D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\
& +(-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l(\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + (-1)^{l.(i+m+k)}\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j)\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i}Y^iu_{(3)}^k\Gamma_{ik}^j\partial_j \\
& +(-1)^{Y^i+k}Y^iu_{(2)}^ku_{(1)}^l((-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma_{il}^m}{\partial u^k} + (-1)^{k.(i+n)}\Gamma_{il}^n\Gamma_{nk}^m)\partial_m \\
& +(-1)^{Y^i+l+1}Y^iu_{(1)}^ku_{(1)}^lu_{(1)}^m(\frac{\partial^2\Gamma_{ik}^o}{\partial u^m\partial u^l} \\
& +(-1)^{l.(i+n+k)+m.(i+k+n)}\Gamma_{ik}^n\frac{\partial\Gamma_{nl}^o}{\partial u^m} \\
& +(-1)^{l.(i+n+k)+m.(i+j+k+l)}\Gamma_{ik}^n\Gamma_{nl}^j\Gamma_{jm}^o)\partial_o
\end{aligned}
$$

On peut remarquer que l'on a :

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l(\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + (-1)^{l.(i+m+k)}\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j)\partial_j \\
= \; & (-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l\frac{1}{2}(\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} - (-1)^{l.k}\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial u^k} + (-1)^{l.(i+m+k)}\Gamma_{ik}^m\Gamma_{ml}^j - (-1)^{k.(i+m)}\Gamma_{il}^m\Gamma_{mk}^j)\partial_j \\
= \; & (-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^ku_{(1)}^l\frac{1}{2}R_{ikl}^j\partial_j
\end{aligned}
$$

et aussi :

$$
(-1)^lu_{(1)}^lu_{(1)}^m\frac{\partial^2\Gamma_{ik}^o}{\partial u^m\partial u^l} = (-1)^mu_{(1)}^mu_{(1)}^l\frac{\partial^2\Gamma_{ik}^o}{\partial u^l\partial u^m} = -(-1)^lu_{(1)}^lu_{(1)}^m\frac{\partial^2\Gamma_{ik}^o}{\partial u^m\partial u^l}
$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot\gamma})^3 Y &= (D_c)^3(Y^i)\partial_i \\
&+(-1)^{Y^i}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\
&+D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\
&+(-1)^{k+1}D_c(Y^i)u_{(1)}^k u_{(1)}^l\frac{1}{2}R_{ikl}^j\partial_j \\
&+(-1)^{Y^i}Y^i u_{(3)}^k\Gamma_{ik}^j\partial_j \\
&+(-1)^{Y^i+k}Y^i u_{(2)}^k u_{(1)}^l((-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma_{il}^m}{\partial u^k}+(-1)^{k.(i+n)}\Gamma_{il}^n\Gamma_{nk}^m)\partial_m \\
&+(-1)^{Y^i+l+1}Y^i u_{(1)}^k u_{(1)}^l u_{(1)}^m\frac{1}{6}((-1)^{(l+m).(i+n+k)}\Gamma_{ik}^n R_{nlm}^o \\
&-(-1)^{(k+m).(i+n)+m.l}\Gamma_{il}^n R_{nkm}^o+(-1)^{(l+k).(i+n)}\Gamma_{im}^n R_{nkl}^o)\partial_o
\end{aligned}$$

Et donc dans le cas d'une courbure nulle :

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot\gamma})^3 Y &= (D_c)^3(Y^i)\partial_i+(-1)^{Y^i}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ik}^l\partial_l+D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ik}^l\partial_l \\
&+(-1)^{Y^i}Y^i u_{(3)}^k\Gamma_{ik}^j\partial_j+(-1)^{Y^i+k}Y^i u_{(2)}^k u_{(1)}^l((-1)^{k.l}\frac{\partial\Gamma_{il}^m}{\partial u^k}+(-1)^{k.(i+n)}\Gamma_{il}^n\Gamma_{nk}^m)\partial_m
\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}
(-1)^X\iota(X,(\nabla_{\dot\gamma})^3Y)\omega &= (-1)^X X^j(-1)^{Y^i.j}((-1)^j(D_c)^3(Y^i)\omega_{ij}+(-1)^{Y^i+j.k+j}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ikj} \\
&+(-1)^{k.j+j}D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ikj}+(-1)^{Y^i+j.k+j}Y^i u_{(3)}^k\Gamma_{ikj}) \\
&+(-1)^{Y^i+k.(1+l)+j.l+j}Y^i u_{(2)}^k u_{(1)}^l(\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{(i+l).(k+j)}\Gamma_{il}^m\Gamma_{jkm}) \\
&= (-1)^{X+Y}X^j(-1)^{Y^i.j}((-1)^{Y^i+j+i}(D_c)^3(Y^i)\omega_{ij}+(-1)^{j.k+i+j}(D_c)^2(Y^i)u_1^k\Gamma_{ikj} \\
&+(-1)^{Y^i+k.j+i+j}D_c(Y^i)u_{(2)}^k\Gamma_{ikj}+(-1)^{j.k+j+i}Y^i u_{(3)}^k\Gamma_{ikj}) \\
&+(-1)^{(j+k).l+j+i+k}Y^i u_{(2)}^k u_{(1)}^l(\frac{\partial\Gamma_{ilj}}{\partial u^k}+(-1)^{(i+l).(k+j)}\Gamma_{il}^m\Gamma_{jkm})
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé 3.5.3.
En comparant avec 3.5.6, on a que la forme d'ordre 3 s'écrit bien :

$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(X,(\nabla_{\dot\gamma})^3Y)\omega$$

□

CHAPITRE 4

COMPLEXE DES FORMES HOMOGÈNES ET COHOMOLOGIE

Les résultats de ce dernier chapitre s'inspirent des articles de Mokhov, *Complex homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds and their cohomology groups* [**Mok96**] et *On cohomology groups of complexes of homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds* [**Mok98a**], dont les résultats sont repris dans [**Mok98b**]. Dans cet article, l'auteur définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le complexe des formes homogènes d'ordre k sur les espaces de lacets. Il calcule alors la cohomologie pour l'ordre 0 ainsi que les premiers espaces de cohomologie pour les ordres 1, 2 et 3. Ici, l'on adapte ces calculs au cas des formes homogènes sur les espaces de superlacets.

4.1. Formes homogènes

Tout d'abord, l'on définit le complexe des formes homogènes. Deux différences principales par rapport au cas classique sont à noter. La première est l'introduction des signes dans les formules suivant la règle des signes. Et la deuxième est que l'on autorise une dépendance en x et θ des formes homogènes.

4.1.1. Définition des formes homogènes. —

Définition 58. — *Soit M une supervariété.*

Une k-forme ω homogène d'ordre m sur SLM s'écrit sous la forme :

$$\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (D_c^{i_k} \otimes du^{l_k}) \cdots (D_c^{i_1} \otimes du^{l_1}) u_{(j_1)}^{m_1} \cdots u_{(j_q)}^{m_q} \omega_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}$$

avec

- *les coefficients $\omega_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_k}^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_k}$ ne dépendent pas des dérivées $u_{(s)}^i$:*

$$\omega_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_k}^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_k} = \omega_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_k}^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_k}(x, \theta, u)$$

- *Les expressions polynomiales en les coordonnées sont ordonnées selon les degrés de dérivation, càd que les indices j_i vérifient*

$$j_1 \geq j_2 \geq \cdots j_q \geq 1$$

- *pour chaque multi-indice ${}_{l_1 \cdots l_k m_1 \cdots m_k}^{i_1 \cdots i_k j_1 \cdots j_k}$, on a :*

$$\sum_{s=1}^{k} i_s + \sum_{s=1}^{q} j_s = m$$

– *si* $j_p = j_{p+1} = \cdots = j_{p+k}$*,* $\forall s \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$ *alors*

$\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \;\cdots\; j_p \;\; j_p \;\cdots\; j_k}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_{p+s} m_{p+s+1} \cdots m_k} = (-1)^{(m_{p+s}+j_p).(m_{p+s+1}+j_p)} \omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \;\cdots\; j_p \;\; j_p \;\cdots\; j_k}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_{p+s+1} m_{p+s} \cdots m_k}$

Remarque. — – *On peut remarquer que par définition, une forme homogène est nécessairement une forme locale.*

– *Les sommes* $\sum_{s=1}^{k} i_s$ *et* $\sum_{s=1}^{q} j_s$ *représentent respectivement le degré total de dérivation des champs des vecteurs et le degré total de dérivation des coordonnées.*

Si on évalue la k-forme homogène ω en k champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_k$, on obtient alors :

$\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega$

$= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{\sum_{n=1}^{k} (X_n.(1+i_n) + ((X_n)^{l_n}+i_n).(\sum_{p<n}(l_p+i_p))} (X_1)^{l_1}_{(i_1)} \cdots (X_k)^{l_k}_{(i_k)} u^{m_1}_{(j_1)} \cdots u^{m_q}_{(j_q)} \omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$

Le signe se justifie comme précédement par la règle des signes en passant de l'expression

$$X_1 \cdots X_k \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (D_c^{l_k} \otimes du^{i_k}) \cdots (D_c^{l_1} \otimes du^{i_1})$$

à l'expression

$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}} (X_1)^{l_1}_{(i_1)} \cdots (X_k)^{l_k}_{(i_k)}$$

Remarque. — *Pour une forme homogène* ω*, les coefficients* $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ *ne sont pas définis de manière unique. Par intégration par partie, on peut toujours se ramener au cas* $i_1 = 0$ *et les coefficients sont alors définis de manière unique (pour des* k*-formes avec* $k \geq 2$*).*

4.1.2. Dépendance en x et θ, premières restrictions. —

La non-unicité des coefficients implique que la dépendance en x et θ des coefficients $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ n'est pas évidente. La discussion qui suit s'adapte sans problèmes au cas non super puisque les conditions de dépendance en x et en θ sont indépendantes.

Le caractère homogène n'est pas conservé dans une intégration par parties à moins de dépendances spécifiques. Par exemple, $D_c(u^k_{(1)} \alpha^k_{ij}(x, \theta, u)) = u^k_{(2)} \alpha^k_{ij} + (-1)^{k+1} u^k_{(1)} \partial_c(\alpha^k_{ij}) + (-1)^{k+1} u^k_{(1)} u^l_{(1)} \dfrac{\partial \alpha^k_{ij}}{\partial u^l}$ et si le terme $\partial_c(\alpha^k_{ij})$ n'est pas nul, l'expression ci-dessus n'est pas homogène.

De ce fait, il existe plusieurs possibilités de dépendance en x et θ.

Une première possibilité est d'imposer à tous les coefficients $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ d'être indépendants de x et de θ. A première vue, cela semble trop restrictif puisque l'on a déjà identifié des formes homogènes d'ordre 2 symplectiques dépendant explicitement de θ.

Une deuxième possibilité est de demander à ce que l'expression sous l'intégrale reste homogène par n'importe quelle intégration par parties.

Or pour tout terme $(X^k)^{l_k}_{(i_k)} u^{m_1}_{(j_1)} \cdots u^{m_q}_{(j_q)} \omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ tel que $\exists i_p > 0$, une intégration par partie sur $(X^p)^{l_p}_{i_p}$ donne un terme non homogène qui s'annule ssi $\partial_c(\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}) = 0$.

Autrement dit tous les termes $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ sont indépendants de x et de θ sauf les termes $\omega^{0 \cdots 0 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$.

On peut encore tenter d'affaiblir un peu la condition précédente.

Les conditions précédentes découlent de la propriété d'antisymétrie des formes et du fait que aucune convention dans l'écriture des coefficients n'a été fixée. Or si l'on veut l'unicité dans la définition des coefficients, on peut imposer que X^1 n'apparaîsse qu'avec l'indice $i_1 = 0$. Dans ce cas les conditions d'antisymétries entre les X^j X^l avec $2 < j, l < k$ ne font intervenir aucune intégration par partie et la condition d'antisymétrie entre X^1 et X^p ne fait intervenir pour chaque terme $(X^1)^{l_1}_{(i_1)} \cdots (X^p)^{l_p}_{(i_p)} \cdots (X^k)^{l_k}_{(i_k)} u^{m_1}_{(j_1)} \cdots u^{m_q}_{(j_q)} \omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ qu'une intégration par partie à la puissance i_p.

Ainsi dans le cas des puissances impaires, on retrouve la condition
$$\partial_c(\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}) = 0$$
Mais dans le cas des puissances paires, on trouve seulement
$$\partial_x(\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}) = 0$$
Autrement dit comme précédemment, tous les termes $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ exceptés ceux de la forme $\omega^{0 \cdots 0 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$, sont indépendants de x et seuls les termes de la forme $\omega^{2i'_k \cdots 2i'_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}$ où tous les indices $i_p = 2i'_p$ sont pairs peuvent dépendre explicitement de θ.

Proposition 4.1. — *Soit M une supervariété et ω une k-forme homogène d'ordre m sur SLM alors pour tous les indices $j_1 \cdots j_q, l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q$*

(i) $\omega^{0 \cdots 0 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q} = \omega^{0 \cdots 0 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}(x, \theta, u)$.

(ii) *Pour tous les indices $i_k, \cdots, i_1$, tel que $\exists i_p > 0$,* $\omega^{2i_k \cdots 2i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q} = \omega^{2i_k \cdots 2i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}(\theta, u)$.

(iii) *Pour tous les indices $i_k, \cdots, i_1$, tel que $\exists i_p$ impair,* $\omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q} = \omega^{i_k \cdots i_1 j_1 \cdots j_q}_{l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q}(u)$.

Puisque l'on cherche à obtenir un complexe de formes homogènes, il faut aussi vérifier que ces dépendances en x et θ sont compatibles avec la différentielle extérieure. Or dans le premier cas, il est évident que oui mais pour les deuxième et troisième cas des contraintes supplémentaires apparaissent.

4.1.3. Complexe des formes homogènes d'ordre m. —

Sous la condition de dépendance en x et θ des propositions 4.3 et 4.4.

Proposition 4.2. — *La différentielle d'une k-forme homogène d'ordre m est une $k+1$-forme homogène d'ordre m.*

Démonstration. — On rappelle que pour $X, X_0, \cdots, X_k$ des champs de vecteurs et ω une k-forme, on a :

$$(-1)^k\iota(X_0)\cdots\iota(X_k)d\omega = \sum_{m=0}^{k}(-1)^{m+X_m.(\sum_{n<m}X_n)}X_m.(\iota(X_0)\cdots\widehat{\iota(X_m)}\cdots\iota(X_k)\omega)+$$

$$\sum_{0\leq i<j\leq k}(-1)^{j+X_j\sum_{i<p<j}X_p}\iota(X_0,\cdots,X_{i-1},[X_i,X_j],\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_k)\omega$$

et
$X.F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X.(r+1)}X^i_{(r)}\dfrac{\partial f}{\partial u^i_{(r)}}$
Ainsi :
$(-1)^k\iota(X_0)\cdots\iota(X_k)d\omega$

$$= \int_{\mathbb{S}^{1|1}}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{m+X_m.(\sum_{n<m}X_n+i_m+1)+(l_m+i_m)\sum_{n=0,n\neq m}^{k}((X_n)^{l_n}+i_n)+((X_m)^{l_m}+i_m).\sum_{n<m}((X_n)^{l_n}+i_n)}$$
$$(-1)^{\sum_{n=0,n\neq m}^{k}(X_n.(1+i_n)+((X_n)^{l_n}+i_n).(\sum_{p<n,p\neq m}(l_p+i_p))}(X_0)^{l_0}_{(i_0)}\cdots(X_m)^{l_m}_{(i_m)}\cdots(X_k)^{l_k}_{(i_k)}$$
$$\frac{\partial}{\partial u^{l_m}_{(i_m)}}(u^{m_1}_{(j_1)}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q})$$

avec pour tous les multi-indices ${}^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_k}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_k}$ $\sum_{n=0,n\neq m}^{k}i_n+\sum_{s=1}^{q}j_s m_s = m$

Maintenant on a :

Si $i_m > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial u^{l_m}_{(i_m)}}(u^{m_1}_{(j_1)}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q}) =$$
$$\sum_{p,j_p=i_m}(-1)^{(i_m+l_m)\sum_{n<p}(m_n.+j_n)}u^{m_1}_{(j_1)}\cdots\widehat{u^{l_p}_{(j_p)}}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_{p-1}\ i_m\ j_{p+1}\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_{p-1}l_m m_{p+1}\cdots m_q}$$

Ce terme est de degré $\sum_{n=0}^{q}j_n - i_m$.
Ainsi le degré total de l'expression

$$(X_0)^{l_0}_{(i_0)}\cdots(X_m)^{l_m}_{(i_m)}\cdots(X_k)^{l_k}_{(i_k)}\frac{\partial}{\partial u^{l_m}_{(i_m)}}(u^{m_1}_{(j_1)}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q})$$

est encore égal à $\sum_{n=0}^{k}i_n+\sum_{n=0}^{q}j_n - i_m = \sum_{n=0,n\neq m}^{k}i_n+\sum_{n=0}^{q}j_n = m$

et si $i_m = 0$

$$\frac{\partial}{\partial u^{l_m}}(u^{m_1}_{(j_1)}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q}) = (-1)^{l_m\sum_{n=1}^{q}(m_n+j_n)}u^{m_1}_{(j_1)}\cdots u^{m_q}_{(j_q)}\frac{\partial\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q}}{\partial u^{l_m}}$$

qui est de degré $\sum_{n=0}^{q}j_n$ mais puisque $i_m = 0$, on a bien $\sum_{n=0}^{k}i_n+\sum_{s=1}^{q}j_s = m$.

Ainsi, $d\omega$ est bien une $(k+1)$-forme homogène d'ordre m.

Maintenant, puisque

$$(-1)^{m+X_m.(\sum_{n<m}X^n+i_m+1)+(l_m+i_m)\sum_{n=0,n\neq m}^{k}((X_n)^{l_n}+i_n)+((X_m)^{l_m}+i_m).\sum_{n<m}((X_n)^{l_n}+i_n)} =$$

$$(-1)^{X_m.(i_m+1)+((X_m)^{l_m}+i_m).(\sum_{n<m}(i_n+l_n))+\sum_{n>m}^{k}((X_n)^{l_n}+i_n).(l_m+i_m)}$$
$$(-1)^{m+i_m.\sum_{n<m}(l_n+i_n)+l_m.\sum_{n<m}(l_n+i_n)}$$

On a ainsi :

(4.1.1)

$$\begin{aligned}
&(-1)^k(d\omega)^{i_k\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}\\
= &\sum_{m=0,i_m=0}^{k}(-1)^{m+l_m.\sum_{n<m}(l_n+i_n)}(-1)^{l_m\sum_{n=1}^{q}(m_n+j_n)}\frac{\partial\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_q}}{\partial u^{l_m}}\\
&+\sum_{m=0,i_m\neq 0}^{k}(-1)^{m+(i_m+l_m).\sum_{n<m}(l_n+i_n)}\\
&\qquad(\sum_{\substack{p,\ j_p=i_m\\ \text{ou}\\ j_{p+1}=i_m}}(-1)^{(i_m+l_m)\sum_{n<p}(m_n.+j_n)}\omega^{i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots i_0 j_1\cdots j_p\ i_m\ j_{p+1}\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_p l_m m_{p+1}\cdots m_q})
\end{aligned}$$

□

A partir de cette expression, l'on peut vérifier si la différentielle extérieure vérifie bien les conditions de dépendance explicite en x et θ initiales.

Dans le deuxième cas où seuls les coefficients en $\omega^{0\cdots 0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}$ peuvent dépendre de x ou de θ, on voit que si au moins 2 indices $i_p, i_{p'}$ de $(d\omega)^{i_k\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}$ sont non nuls, tous les termes qui interviennent ont au moins un indice $i_{p''}$ non nul et sont donc tous indépendants de x et de θ.

Par contre dans le cas où un seul indice i_m est non nul, le terme $(d\omega)^{i_k\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}$ dépend de x et de θ seulement par l'intermédiaire du coefficient $\omega^{0\cdots\widehat{i_m}\cdots 0\ \ j_1\cdots j_p\ i_m\ j_{p+1}\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_p l_m m_{p+1}\cdots m_q}$. Il faut donc imposer en plus la condition, dans le cas des formes homogènes d'ordre supérieur ou égal à 1 que :

$$\partial_c(\omega^{0\ \cdots\ 0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}) = 0$$

Autrement dit sous cette restriction, seules les formes homogènes d'ordre 0 admettent une dépendance explicite en x et θ.

Dans le troisième cas, seuls les coefficients $\omega^{0\cdots 0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}$ peuvent dépendre de x et seuls les coefficients $\omega^{2i_k\cdots 2i_1 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}$ peuvent dépendre de θ.

Pour la dépendance en x le raisonnement est le même que précedemment donc seules les formes homogènes d'ordre 0 admettent une dépendance explicite en x.

Pour la dépendance en θ, on voit que si au moins 2 indices $i_p, i_{p'}$ de $(d\omega)^{i_k\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}$ sont impairs, tous les termes qui interviennent ont au moins un indice $i_{p''}$ impair et sont donc tous indépendants de θ.

Si par contre un seul indice i_m est impair, le terme $(d\omega)^{i_k\cdots i_0 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_0 m_1\cdots m_q}$ dépend de θ seulement par l'intermédiaire du coefficient $\omega^{2i_k\cdots\widehat{i_m}\cdots 2i_1\ \ j_1\cdots j_p\ i_m\ j_{p+1}\cdots j_q}_{l_k\cdots\widehat{l_m}\cdots l_0 m_1\cdots m_p l_m m_{p+1}\cdots m_q}$. Autrement dit, seuls les coefficients de la forme $\omega^{2i_k\cdots 2i_1 2j_1\cdots 2j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}$ peuvent dépendre de θ.

On choisit la condition la moins restrictive à savoir la troisième et on a donc :

Proposition 4.3. — *Soit M une supervariété.*
Si ω est une k-forme homogène d'ordre 0 sur SLM alors tous les coefficients peuvent dépendre de x ou de θ.

Proposition 4.4. — *Soit M une supervariété et ω une k-forme homogène d'ordre $m > 0$ sur SLM alors pour tous les indices $i_k, \cdots, i_1, j_1 \cdots j_q, l_k \cdots l_1 m_1 \cdots m_q$*

(i) *Si il existe un indice i_p ou j_p impair, $\omega^{i_k\cdots i_1 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q} = \omega^{i_k\cdots i_1 j_1\cdots j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}(u)$ ne dépend ni de x ni de θ.*

(ii)
$$\omega^{2i_k\cdots 2i_1 2j_1\cdots 2j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q} = \omega^{2i_k\cdots 2i_1 2j_1\cdots 2j_q}_{l_k\cdots l_1 m_1\cdots m_q}(\theta, u)$$

Sous ces conditions, on peut ainsi définir des complexes de formes homogènes d'ordre m que l'on note $\Omega^*_{[m]}(SLM)$, ainsi que leurs espaces de cohomologie : $H^*_{[m]}(SLM)$.

4.2. H^2 et formes symplectiques exactes

4.2.1. 1-formes et 2-formes symplectiques exactes. —

On cherche maintenant à déterminer les formes symplectiques exactes. Pour celà, on regarde tout d'abord les 1-formes homogènes d'ordre k.

Afin de faciliter les calculs, adoptons des notations différentes.

En effet, une 1-forme α homogène d'ordre k s'écrit :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \sum_{n=0}^{k} (-1)^{X.(n+1)} X^i_{(n)} \alpha^n_i$$

avec α^n_i un polynôme de degré $k-n$ en les dérivées munies de leur degré naturel de dérivation.

On remarque alors que $D_c(\alpha^n_i)$ est un polynôme d'ordre $k-n+1$ et qu'ainsi par intégration par partie, on est ramené au cas :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X X^i \alpha_i$$

avec α_i homogène de degré k.

On note α_{ij} le coefficient dominant de α^i tel que $\alpha^i = (-1)^{i.k} u^j_{(k)} \alpha_{ij}(x,\theta,u) + \cdots$

On a alors :

$$-\iota(X,Y)d\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X.(s+1)+(j+s).Y^i} X^j_{(s)} (-1)^Y Y^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_{(s)}} \\ -(-1)^{X.Y}(-1)^{Y.(s+1)+(i+s).X^j} Y^i_{(s)} (-1)^X X^j \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i_{(s)}}$$

Après intégrations par parties, pour se ramener à des termes de la forme $X^j Y^i_{(s)}$, on obtient alors :

(4.2.1)

$$\begin{aligned} &-\iota(X,Y)d\alpha \\ = &\int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y+j.Y^i} X^j Y^i_{(2s)} ((-1)^s \sum_{n\geq s} C^s_n (\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_{(2n)}})_{2n-2s} - (-1)^{j+s} \sum_{n\geq s} C^s_n (\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_{(2n+1)}})_{2n-2s+1} \\ &-(-1)^{i.j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i_{(2s)}}) - (-1)^{X+j.(Y^i+1)} X^j Y^i_{(2s+1)} ((-1)^{s+i} \sum_{n\geq s} C^s_n (\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_{(2n+1)}})_{2n-2s} \\ &+(-1)^{(i+1).j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i_{(2s+1)}}) \end{aligned}$$

Regardons les coefficients du terme en $X^j Y^i_{(k)}$. En effet dans nos calculs précédents, on impose que ces coefficients qui sont les coordonnées d'un 2-tenseur covariant (symétrique si $k \equiv 1$ ou $2[4]$ et antisymétrique si $k \equiv 0$ ou $3[4]$) forment un 2 tenseur non dégénéré, càd soit une métrique Riemanienne $g = g_{ij}$ soit une forme presque symplectique $\omega = \omega_{ij}$.

Dans le cas où $k = 2s$ est pair, ce coefficient vaut :

$$((-1)^s \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_k} - (-1)^{i.j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i_k}) = (-1)^s \alpha_{ij} - (-1)^{i.j} \alpha_{ji}$$

Dans le cas où $k = 2s+1$ est impair, ce coefficient vaut :

$$((-1)^{s+i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^j_{(k)}} + (-1)^{(i+1).j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial u^i_{(k)}}) = (-1)^s \alpha_{ij} + (-1)^{i.j} \alpha_{ji}$$

Proposition 4.5. — *Soit α une 1-forme homogène d'ordre k sur SLM telle que $d\alpha$ soit une forme symplectique, alors*

(i) *Si $k \equiv 1$ ou $2[4]$, la partie paire du tenseur α_{ij} est une métrique Riemanienne sur M.*
(ii) *Si $k \equiv 0$ ou $3[4]$, la partie impaire du tenseur α_{ij} est une forme presque symplectique sur M.*

4.2.2. Calcul de $H^2_{[1]}(SLM)$ et formes symplectiques homogènes d'ordre 1 exactes. —

Le but de cette partie est de déterminer l'espace de cohomologie $H^2_{[1]}(SLM)$. L'on considère d'abord toutes les 2-formes homogènes d'ordre 1 fermées. Les résultats du chapitre 3.3.3 sur les conditions de fermeture permettent d'écrire toute 2-forme homogène sur SLM :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+Y} X^j (Y^i_{(1)} (-1)^{Y+j.(Y^i+1)} \omega^1_{ij}(u) + (-1)^{(k+1).(i+j)+i.k} Y^i u^k_{(1)} \omega^0_{ikj}(u))$$

avec les relations suivantes :

$$\omega^1_{ij} = (-1)^{i.j} \omega^1_{ji}$$

$$(-1)^{j.(i+k)} \omega^0_{kij} + (-1)^{i.k} \omega^0_{jik} = \frac{\partial \omega^1_{jk}}{\partial u^i}$$

Et si l'on note $T_{ijk} = \omega^0_{ijk} - (-1)^{i.j} \omega^0_{jik}$,

$$(-1)^{i.j} T_{kji} + T_{kij} = 0$$

$$dT = 0$$

Remarque. — *Dans le cas des formes homogènes, les coefficients ω^1_{ij} sont les coefficients d'un* 2*-tenseur covariant symétrique mais ne sont plus nécessairement inversibles. Par abus de langage, on considère que les coefficients ω^0_{kij} s'interprètent encore comme les coefficients de Christoffel covariants d'une connexion et donc T_{ijk} comme les coefficients de la forme de torsion associée.*

On pourra remarquer que les coefficients ω^0_{kij} sont alors parfaitement définis par :

(4.2.2)

$$\omega^0_{kij} = (-1)^{j.(i+k)} \frac{\partial \omega^1_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial \omega^1_{ki}}{\partial u^j} + (-1)^{k.(i+j)} \frac{\partial \omega^1_{ij}}{\partial u^k} + (-1)^{(i+j).k} T_{ijk} - (-1)^{(i+k).j} T_{jki} + T_{kij}$$

Proposition 4.6. — *Les formes homogènes d'ordre* 1 *sur SLM exactes sont les formes telles que la forme de torsion $T = T_{ijk}$ est exacte.*

Démonstration. — Les 1-formes homogènes d'ordre 1 s'écrivent d'après 4.2.1 :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} X^i_{(1)} \alpha^1_i + (-1)^{X+(j+1).i} X^i u^j_{(1)} \alpha'_{ji}$$

Grâce à une intégration par partie sur le premier terme et comme $D_c(\alpha^1_i) = u^j_{(1)} \dfrac{\partial \alpha^1_i}{\partial u^j}$, l'on voit que l'on peut se ramener au cas :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+(j+1).i} X^i u^j_{(1)} \alpha_{ji}$$

avec $\alpha_{ji} = \alpha'_{ji} - (-1)^{i.j} \dfrac{\partial \alpha^1_i}{\partial u^j}$

Dans les notations précédentes, on a : $(-1)^{(j+1).i}\alpha_{ji} = \alpha_{i\ j}^{1\ 0}$.

Dans un changement de variable, on a :

$$\textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+i.(j+1)}X^i u^j_{(1)}\alpha_{ji} = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+(j+1).i}X'^k\frac{\partial u^i}{\partial u'^k}u'^l_{(1)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^l}\alpha_{ji}$$

On en déduit alors que :

$$\alpha'_{lk} = (-1)^{i.(j+l)}\frac{\partial u^i}{\partial u'^k}\frac{\partial u^j}{\partial u'^l}\alpha_{ji}$$

Autrement dit, les α_{ji} sont les coefficients d'un 2-tenseur covariant sur la variété.
Maintenant, on calcule directement $d\alpha$. On a :

$$\begin{aligned}&-\iota(X,Y)d\alpha = \\ &\textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X X^j(-1)^{Y+(k+1).i+(Y^i+k+1).j}Y^i u^k_{(1)}\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}+X^j_{(1)}(-1)^{Y+(j+1).i+Y^i.(j+1)}Y^i\alpha_{ji}- \\ &(-1)^{X.Y}((-1)^Y Y^i(-1)^{X+(k+1).j+i.(X^j+k+1)}X^j u^k_{(1)}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+Y^i_{(1)}(-1)^{X+(i+1).j+X^j.(i+1)}X^j\alpha_{ij})\end{aligned}$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\iota(X,Y)d\alpha = &\textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}X^j((-1)^{j+i+Y^i.(j+1)}Y^i_{(1)}(\alpha_{ij}+(-1)^{i.j}\alpha_{ji}) \\ &+(-1)^{(k+1).(i+j)+Y^i.j}Y^i u^k_{(1)}(-\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}+(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+(-1)^{k.(i+j)+j.i}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k})\end{aligned}$$

On note β la 2-forme définie à partir de α_{ij} et g le 2-tenseur covariant symétrique qui est la partie symétrique de α_{ij} :

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$$

$$g_{ij} = \alpha_{ij} + (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$$

Par identification, dans le cas des formes exactes, on a :

$$T = d\beta$$

et

$$\omega^0_{ikj} = (-1)^{i.k}(-\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}+(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+(-1)^{k.(i+j)+j.i}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k})$$

La première relation permet d'affirmer que si une forme fermée est exacte, la torsion T est exacte aussi.

Maintenant, puisque $T = d\beta$, on peut aussi écrire la deuxième relation sous la forme :

$$\omega^0_{ikj} = (-1)^{i.k}(-\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}+(-1)^{i.j}\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}+(-1)^{k.(i+j)+j.i}\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k})+(-1)^{(j+k).i}T_{kji}-(-1)^{(i+k).j+i.k}T_{jik}+T_{ikj}$$

D'après 4.2.2, on en déduit que toutes les formes fermées dont la torsion est exacte sont bien exactes, ce qui conclut la démonstration.

□

On peut maintenant déterminer l'espace de cohomologie $H^2_{[1]}(LM)$

Théorème 4.7. —
$$H^2_{[1]}(SLM) = H^3(M)$$

Démonstration. — Pour un 2-tenseur covariant ω^1_{ij} donné, puisque les ω^0_{ikj} se transforment comme des coefficients de Christoffel covariants on voit que deux solutions diffèrent d'un trois tenseur S_{ijk} tel que :

$$(-1)^{j.(i+k)}S_{kij} = -(-1)^{j.k}S_{jik}$$

et

$$S_{kij} + (-1)^{i.j}S_{kji} = 0$$

Autrement dit les S_{ijk} sont les coordonnées d'une trois forme et la relation $dT = 0$ implique que cette trois forme est fermée.

Ainsi, à ω^1_{ij} fixés, l'espace des 2-formes homogènes d'ordre 1 fermées est un espace affine de direction $Z^3(M)$. D'après la proposition 4.6, on en conclut que l'espace des 2-formes homogènes d'ordre 1 exactes est un espace affine de direction $B^3(M)$.

Il suffit de montrer maintenant que pour deux formes fermées, données par deux paires (g, ∇_1) et (h, ∇_2), il existe une forme cohomologue à la première qui s'écrit (h, ∇_2').

A partir des coefficients de Christoffel ω_{ikj} de ∇_1, l'on peut construire une connexion ∇_2' compatible avec h et de même torsion que ∇_1. Celle-ci est donnée par les coefficients de Christoffel covariants par rapport à h suivants :

$$\omega'^0_{ikj} = \omega_{ikj} + \frac{1}{2}((-1)^{j.k}\partial_k(h_{ij}-g_{ij}) + (-1)^{i.(j+k)}\partial_i(h_{kj}-g_{kj}) - (-1)^{j.(i+k)}\partial_j(h_{ik}-g_{ik}))$$

En effet, dans un changement de variables, les coefficients $(-1)^{j.k}\partial_k h_{ij}$ se tranforment suivant:

$$\begin{aligned}
(-1)^{l.n}\partial_l h'_{mn} &= (-1)^{l.n}(-1)^{j.(i+m+k)}\frac{\partial u^k}{\partial u'^l}\frac{\partial}{\partial u^k}(\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}(-1)^{j.k}h_{ij}) \\
&= (-1)^{k.(i+m)}(-1)^{j.(i+m+l+k)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^k}{\partial u'^l}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}(-1)^{j.k}\partial_k h_{ij} \\
&+(-1)^{l.n}(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^l \partial u'^n}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}h_{ij} \\
&+(-1)^{l.n}(-1)^{j.(i+m)}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^l \partial u'^m}\frac{\partial u^i}{\partial u'^n}(-1)^{n.m+j.(n+m)}h_{ij}
\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}((-1)^{n.l}\partial_l h_{mn} + (-1)^{m.(n+l)}\partial_m h_{ln} - (-1)^{n.(m+l)}\partial_n h_{ml}) = \\
&(-1)^{k.(i+m)+j.(i+m+l+k)}\frac{\partial u^j}{\partial u'^n}\frac{\partial u^k}{\partial u'^l}\frac{\partial u^i}{\partial u'^m}\frac{1}{2}((-1)^{j.k}\partial_k h_{ij} + (-1)^{i.(j+k)}\partial_i h_{kj} - (-1)^{j.(i+k)}\partial_j h_{ik}) \\
&\qquad +(-1)^{(j+l+m).n}\frac{\partial^2 u^j}{\partial u'^l \partial u'^m}\frac{\partial u^i}{\partial u'^n}h_{ji}
\end{aligned}$$

Par construction, on a bien :

$$(-1)^{j.(i+k)}\omega^0_{kij} + (-1)^{i.k}\omega^0_{jik} = \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i}$$

et

$$\omega^0_{ijk} - (-1)^{i.j}\omega^0_{jik} = \omega_{ijk} - (-1)^{i.j}\omega_{jik}$$

Puisque les deux formes ont même forme de torsion, la classe d'homologie de la forme : $(h-g, \nabla'_2 - \nabla_1)$ est bien nulle, ce qui conclut la démonstration.

□

Dans le cas symplectique maintenant, on sait qu'une 2-forme homogène ω d'ordre 1 s'écrit :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}X^j((-1)^{Y+(Y^i+1).j}Y^i_{(1)}g_{ij}+(-1)^{Y^i.j+(k+1).(i+j)+i.k}Y^iu^k_{(1)}\omega_{ikj}$$

avec $g=(g_{ij})$ une métrique Riemanienne et les ω_{ijk} sont les coefficients covariants d'une connexion compatible avec la métrique et telle que la torsion soit une 3 forme fermée.

D'après les résultats précédents, si la torsion est en plus exacte, càd si il existe une 2-forme β telle que $T=d\beta$ alors la forme symplectique est exacte $\omega = d\alpha$, avec :

$$\iota(X)\alpha = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(\dot\gamma, X)(g+\beta)$$

Ainsi :

Proposition 4.8. — *Soit M une supervariété.*
Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 1 *sur SLM exactes s'écrivent*

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(X,\nabla_{\dot\gamma}Y)g$$

où

(i) *g est une métrique Riemanienne sur M*
(ii) *∇ est une connexion sur M compatible avec la métrique g et telle que la torsion (sous forme covariante) soit une* 3*-forme exacte sur M.*

Le calcul précédent s'applique ligne par ligne au cas classique. On retrouve ainsi le même résultat.

Remarque. — *Si $\beta = 0$ on retrouve la* 1*-forme canonique du cas classique* $\iota(X)\alpha = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(\dot\gamma, X)g$ *étudiées dans* [**Wur95**] *et* [**GR07**] *dont la différentielle extérieure est la* 2*-forme*

$$\omega(X,Y)(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X\iota(X,\nabla_{\dot\gamma}Y)g$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita.

4.2.3. Calcul de $H^2_{[2]}(SLM)$ et formes symplectiques homogènes d'ordre 2 exactes. —

Maintenant les 1-formes homogènes d'ordre 2 s'écrivent :
$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X X^i_{(2)}\alpha^2_i + (-1)^{(j+1).i}X^i_{(1)}u^j_{(1)}\alpha^1_{ji} + (-1)^{X+i.j}X^i u^j_{(2)}\alpha_{ji}$
$+(-1)^{X+(j+k).i+(j+1).k}X^i u^k_{(1)}u^j_{(1)}\alpha_{jki}$

Grâce à une intégration par partie et puisque $D_c(u^j_{(1)}\alpha^1_{ji}) = u^j_{(2)}\alpha^1_{ji} - (-1)^j u^j_{(1)}u^k_{(1)}\dfrac{\partial\alpha^1_{ji}}{\partial u^k}$ et $D^2_c(\alpha^2_i) = u^j_{(2)}\dfrac{\partial\alpha^2_i}{\partial u^j}$, l'on voit que l'on peut se ramener au cas :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+i.j}X^i u^j_{(2)}\alpha_{ji}(\theta,u) + (-1)^{X+(j+k).i+(j+1).k}X^i\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^j_{(1)}\alpha_{jki}(u)$$

avec $\alpha_{jki} = -(-1)^{j.k}\alpha_{kji}$.

Dans un changement de variables, on voit que les coefficients α_{ij} et α_{ijk} se comportent respectivement comme les coordonnées d'un 2-tenseur et d'un 3-tenseur covariants.

Maintenant, on a d'après 4.2.1 :

$$-\iota(X,Y)d\alpha =$$
$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i_{(2)}\Big(-\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j_{(2)}} - (-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial u^i_{(2)}}\Big) - (-1)^{X+j.(Y^i+1)}X^jY^i_{(1)}\Big((-1)^i\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j_{(1)}} +$$
$$(-1)^{(i+1).j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial u^i_{(1)}}\Big) + (-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i\Big(\Big(\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j}\Big) + \Big(\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j_{(2)}}\Big)_2 - (-1)^j\Big(\frac{\partial\alpha_i}{\partial u^j_{(1)}}\Big)_1 - (-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial u^i}\Big)$$

avec $\alpha_i = (-1)^{i.j}u^j_{(2)}\alpha_{ji} + (-1)^{(j+k).i+(k+1).j}\dfrac{1}{2}u^j_{(1)}u^k_{(1)}\alpha_{kji}$.

Ainsi,

$$-\iota(X,Y)d\alpha =$$
$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i_{(2)}(-(-1)^{i.j}\alpha_{ji}-\alpha_{ij}) - (-1)^{X+j.(Y^i+1)}X^jY^i_{(1)}(-1)^{(k+1).(i+j)}u^k_{(1)}(\alpha_{kij}+$$
$$(-1)^{i.j}\alpha_{kji})$$
$$+\ (-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i\Big((-1)^{(i+j).k}u^k_{(2)}\Big(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j} - (-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i} + (-1)^{i.j+k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k} -$$
$$(-1)^{i.j}\alpha_{kji}\Big)$$
$$+(-1)^{(l+k).(i+j)+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\Big(\frac{\partial\alpha_{lki}}{\partial u^j} - (-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{lkj}}{\partial u^i}\Big) + (-1)^{i.j+k}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}\Big((-1)^{k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{kji}}{\partial u^l} -$$
$$(-1)^{l.(i+j+k)}\frac{\partial\alpha_{lji}}{\partial u^k}\Big)$$

où on a utilisé que :
$$(-1)^{(j+k).i+k.j+k}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{\partial\alpha_{kji}}{\partial u^l} = (-1)^{i.j+k}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}\Big((-1)^{k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{kji}}{\partial u^l} - (-1)^{l.(i+j+k)}\frac{\partial\alpha_{lji}}{\partial u^k}\Big)$$

Dans la formule de $d\alpha$, on remarque que seule la partie en θ de α contribue à la partie en θ de $d\alpha$ et seule la partie indépendante de θ contribue à la partie indépendante de θ de $d\alpha$. L'espace de cohomologie $H^2_{[2]}(LM)$ est alors la somme directe de l'espace de cohomologie des formes indépendantes de θ que l'on notera $(H^2_{[2]})_0(LM)$ et de l'espace de cohomologie des formes factorisables par θ que l'on notera $(H^2_{[2]})_1(LM)$.

Dans un premier temps, l'on s'intéresse à la partie dépendant explicitement de θ.
On a :

Proposition 4.9. —

$$(H^2_{[2]})_1(SLM) = H^3(M)$$

Démonstration. — En notant dans un abus de notations $\alpha_{ij}\theta$ la partie de α_{ij} qui dépend explicitement de θ, on voit que la partie de $d\alpha$ dépendant explicitement de θ s'écrit :

$$-\iota(X,Y)d\alpha =$$
$$\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^j(Y^i_{(2)}(-(-1)^{i.j}\alpha_{ji}-\alpha_{ij})\theta+Y^i((-1)^{(i+j).k}u^k_{(2)}(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}-(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+$$
$$(-1)^{i.j+k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k})\theta))$$

Or dans le cas d'une forme fermée ω, celle-ci s'écrit d'après les résultats du §3.4.3 :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^j(Y^i_{(2)}\omega^2_{ij}\theta + Y^i((-1)^{(i+j).k}u^k_{(2)}\omega^0_{ikj}\theta))$$

avec :
$\omega^2_{ij} = (-1)^{i.j}\omega^2_{ji}$ les coefficients d'un 2-tenseur symétrique.

et tels que si l'on note $T_{ijk} = \omega^0_{ijk} - (-1)^{i.j}\omega^0_{jik}$, les T_{ijk} sont les coordonnées d'une trois forme fermée.

Dans le cas des formes exactes, on voit par identification, que comme dans le paragraphe précédent §4.2.2, les T_{ijk} sont les coordonnées d'une trois forme exacte.

□

Les formes symplectiques exactes factorisables par θ seront de la forme :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}\iota(X,\nabla_{\ddot{\gamma}}Y)(g)\theta$$

avec ∇ une connexion compatible avec la métrique g et telle que le tenseur de courbure covariant soit une 3 forme exacte.

Elles proviennent des formes

$$\iota(X)\alpha = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^{1|1}}\iota(X,\ddot{\gamma})(g+\beta)\theta$$

avec β une 2 forme sur M.

On pourra remarquer l'analogie avec le résulat de l'ordre 1 du chapitre précédent ainsi qu'avec le cas classique [**Mok96**].

On regarde maintenant la partie indépendante de θ des formes exactes.

Proposition 4.10. —
$$(H^2_{[2]})_0(SLM) = 0$$

Démonstration. — Une forme homogène d'ordre 2 fermée ω, indépendante de θ s'écrit d'après le §3.4.3 :

$$\iota(X,Y)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y}((-1)^{Y^i.j}X^jY^i_{(2)}\omega^2_{ij}+(-1)^{Y^i.(j+1)+(i+j).k}X^jY^i_{(1)}u^k_{(1)}((-1)^{k.i}\omega^0_{ikj}+ (-1)^{j.(i+k)}\omega^0_{jki} - (-1)^{k.(i+j)}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k}) + (-1)^{Y^i.j}X^jY^i(-1)^{(i+j).l+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}((-1)^{i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilj}}{\partial u^k}-(-1)^{j.k+(i+j+k).l}\frac{\partial\omega^0_{ikj}}{\partial u^l}-(-1)^{j.k+i.l}\frac{\partial\omega^0_{ilk}}{\partial u^j}+ (-1)^{i.(k+j)+l.j}\frac{\partial\omega^0_{jlk}}{\partial u^i}) + (-1)^{(Y^i+k).j}X^jY^iu^k_{(2)}\omega^0_{ikj})$$

avec :
- ω^2_{ij} les coefficients d'un 2-tenseur covariant symétrique.
- ω^0_{ijk} tels que

$$\omega^0_{kij} + (-1)^{i.j}\omega^0_{kji} = (-1)^{(i+j).k}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} \qquad (4.2.3)$$

Pour un 2-tenseur ω^2_{ij} donné, la différence entre les coefficients ω^0_{ijk} et ω'^0_{ijk} de deux formes fermées est un 3 tenseur covariant A_{ijk} d'après les formules de transformation par un changement de coordonnées.

Et d'après 4.2.3, ce tenseur doit vérifier la condition suivante :

$A_{kij} + (-1)^{i.j}A_{kji} = 0$ càd être antisymétrique en les deux derniers indices.

Lemme 4.11. —
Deux formes homogènes d'ordre 2 sur SLM fermées de même coefficient ω^2_{ij} sont cohomologues.

Démonstration. — Une forme homogène d'ordre 2 exacte, indépendante de θ s'écrit :

$$-\iota(X,Y)d\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i_{(2)}(-(-1)^{i.j}\alpha_{ji}-\alpha_{ij})-(-1)^{X+j.(Y^i+1)}X^jY^i_{(1)}(-1)^{(k+1).(i+j)}u^k_{(1)}(\alpha_{kij}+ (-1)^{i.j}\alpha_{kji})+(-1)^{X+Y+j.Y^i}X^jY^i((-1)^{(i+j).k}u^k_{(2)}(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}-(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+(-1)^{i.j+k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k}- (-1)^{i.j}\alpha_{kji}) +(-1)^{(l+k).(i+j)+(l+1).k}\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^l_{(1)}(\frac{\partial\alpha_{lki}}{\partial u^j}-(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{lkj}}{\partial u^i})+(-1)^{i.j+k}u^k_{(1)}u^l_{(1)}\frac{1}{2}((-1)^{k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{kji}}{\partial u^l}- (-1)^{l.(i+j+k)}\frac{\partial\alpha_{lji}}{\partial u^k})$$

Par identification, on a :

$$\omega^2_{ij} = \alpha_{ij} + (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$$

et

$$-\omega^0_{ikj} = (-1)^{i.k}(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j} - (-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i} + (-1)^{i.j+k.(i+j)}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k} - (-1)^{i.j}\alpha_{kji}) =$$
$$(d\beta)_{ikj} + (-1)^{i.k}\frac{\partial\omega^2_{ki}}{\partial u^j} - (-1)^{i.(j+k)}\frac{\partial\omega^2_{kj}}{\partial u^i} + (-1)^{j.k}\frac{\partial\omega^2_{ij}}{\partial u^k} - (-1)^{i.(j+k)}\alpha_{kji}$$

Où β est la 2-forme définie à partir des α_{ij} par $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$

Autrement dit toutes les formes fermées telles que $\omega^2_{ij} = 0$ et $\omega^0_{ikj} = A_{ikj}$ avec $A_{kij} + (-1)^{i.j}A_{kji} = 0$ sont exactes.

La 2-forme définie par $\alpha_{ij} = 0$ et $A_{ikj} = (-1)^{i.(j+k)}\alpha_{kji}$ est alors bien exacte.

□

Ainsi la classe de cohomologie est déterminée par le tenseur ω^2_{ij}.

Maintenant soit deux formes ω_1 et ω_2 définies par des tenseurs symétriques g_{ij} et h_{ij} distincts.

Soit la forme ω définie par le tenseur symétrique :

$$\omega^2_{ij} = h_{ij} - g_{ij}$$

et les coefficients

$$\omega^0_{ikj} = \frac{1}{2}((-1)^{j.k}\partial_k(h_{ij} - g_{ij}) + (-1)^{i.(j+k)}\partial_i(h_{kj} - g_{kj}) - (-1)^{j.(i+k)}\partial_j(h_{ik} - g_{ik}))$$

D'après les résulats précédents, cette forme est exacte : il suffit de prendre $\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - g_{ij})$ (on aura ainsi $\beta = 0$)et $\alpha_{kji} = 0$.

Et puisque par construction $\omega_1 + \omega$ est cohomologue à ω_2 d'après le lemme 4.11, on obtient que toutes les formes sont cohomologues et donc exactes.

□

A partir des deux propositions précédentes, on conclut que :

Théorème 4.12. —
$$H^2_{[2]}(SLM) = H^3(M)$$

Et ainsi :

Proposition 4.13. — *Soit M une supervariété. Les formes symplectiques locales homogènes d'ordre 2 sur SLM exactes sont les formes*

$$\begin{aligned}&\iota(X,Y)\omega\\ = &\int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X)\nabla_{\dot\gamma}(\iota(\nabla_{\dot\gamma}Y)g) + \iota(\dot\gamma)(\iota(\iota(\dot\gamma)\iota(X)\iota(Y)R) + (-1)^{(X+1).Y}\iota(\iota(Y)\iota(\dot\gamma)\iota(X)R)\\ &\qquad -(-1)^{X+Y}\iota(\iota(X)\iota(Y)\nabla_{\dot\gamma}(T)))g + \iota(X)\iota((\nabla_1)_{\ddot\gamma})g_1\theta\end{aligned}$$

telles que ∇_1 est une connexion sur M dont la torsion covariante (pour g_1) est une 3-forme exacte.

4.3. Résultats de Cohomologie

4.3.1. Rappel des résultats de Mokhov. —

Il est tout d'abord important de rappeler que les formes homogènes de Mokhov sont indépendantes de la variable x sur le cercle. Soit M une variété et LM l'espace des lacets. On utilise les mêmes notations que dans le cas super, à savoir que l'espace de cohomologie des formes homogènes d'ordre k sur LM est noté $H^*_{[k]}(LM)$.

Mokhov obtient les 3 théorèmes suivant (voir **[Mok96]**, **[Mok98a]** et **[Mok98b]**) :

Théorème 4.14. —

$$H^*_{[0]}(LM) = H^*(M)$$

Théorème 4.15. —

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad H^i_{[1]}(LM) = H^{i+1}(M)$$

Théorème 4.16. —

$$H^0_{[2]}(LM) = 0$$

4.3.2. Formes d'ordre 0. —

Pour les formes homogènes d'ordre 0, on peut complètement déterminer toute la cohomologie.

On a :

$$\iota(X^1, \cdots, X^k)\Omega(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{\sum_{n=1}^k (X^n + (X^n)^{l_n} \cdot \sum_{p<n} l_p)} (X^1)^{l_1} \cdots (X^k)^{l_k} \omega_{l_k \cdots l_1}(\gamma)$$

Dans un changement de variable, on voit que les $\omega_{l_k \cdots l_1}$ se transforment comme les coefficients d'une k-forme, autrement dit,

$$\iota(X^1, \cdots, X^k)\Omega(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(X^1 \cdots X^k))\omega(x, \theta)$$

où $\omega(x, \theta)$ est une famille de k-formes sur $M^{p|n}$ paramétrée par $\mathbb{S}^{1|1}$.

On a :

$$(d\Omega)_{l_k \cdots l_0} = (-1)^k \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m + l_m \cdot \sum_{n<m}(l_n)} \frac{\partial \omega_{l_k \cdots \widehat{l_m} \cdots l_0}}{\partial u^{l_m}}$$

On peut séparer la partie indépendante de θ et celle qui en dépend explicitement et on obtient en notant $LH^*(M)$ l'espace des lacets dans la cohomologie de De Rham de M :

Théorème 4.17. —

$$H^*_{[0]}(SLM) = LH^*(M) \oplus \Pi LH^*(M)$$

On peut remarquer que si l'on demande aux formes homogènes de ne dépendre ni de x, ni de θ on retrouve le résultat de Mokhov :

$$H^*_{[0]}(SLM) = H^*(M)$$

4.3.3. Fonctionnelles homogènes et H^0 pour les ordres $1, 2$ et 3. —

Pour l'ordre 1, les fonctionnelles s'écrivent :

$$F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} u^k_{(1)} \alpha_k(u)$$

où les α_k sont les coordonnées d'une 1-forme α sur M. Autrement dit :

$$F(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(\dot{\gamma})\gamma^*(\alpha)$$

On a alors $F = 0$ ssi α est exacte!
Maintenant :

$\iota(X)dF =$
$\int_{\mathbb{S}^{1|1}} X^i_{(1)}\alpha_i + (-1)^{X+(k+1).i} X^i u^k_{(1)} \partial_i \alpha_k = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+i} X^i u^k_{(1)}((-1)^{i.k}\partial_i\alpha_k - \partial_k\alpha_i)$

Ainsi $dF = 0$ ssi α est une forme fermée.
Et ainsi :

Théorème 4.18. —

$$H^0_{[1]}(SLM) = H^1(M)$$

Pour l'ordre 2, les fonctionnelles s'écrivent :

$$F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} u^k_{(2)}\alpha^2_k(\theta, u) + \frac{1}{2}(-1)^{(j+1).k} u^k_{(1)} u^j_{(1)} \beta_{jk}(u)$$

Avec $\alpha^2_k = \alpha_k + \alpha'_k\theta$ les coordonnées de deux 1-forme α et α' sur M et β_{jk} les coordonnées d'une 2-forme β sur M.

Autrement dit :

$$F(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(\dot{\gamma})\gamma^*(\alpha + \alpha'\theta) + \frac{1}{2}\iota(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\gamma^*(\beta)$$

On a alors que $F = 0$ ssi $D_c(u^k_{(1)}\alpha_k) = u^k_{(2)}\alpha_k + \frac{1}{2}(-1)^{(j+1).k} u^k_{(1)} u^j_{(1)} \beta_{jk}$ et si $\alpha' = df$ est exacte.

càd ssi $(-1)^{j.k}\partial_j\alpha_k - \partial_k\alpha_j = \beta_{jk}$ càd ssi $\beta = d\alpha$.

Autrement dit l'espace des fonctionnelles homogènes d'ordre 1 est en bijection avec le quotient :

$$\Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \times \Omega^2(M)/\{(df, \alpha, d\alpha)\}$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}\iota(X)dF &= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X X^i_{(2)}\alpha_i + (-1)^{X+i.k} X^i u^k_{(2)}\partial_i\alpha_k + X^i_{(1)}(-1)^{(j+1).i}u^j_{(1)}\beta_{ji} \\ &+\frac{1}{2}(-1)^{X+(j+1).k+i.(j+k)} X^i u^k_{(1)}u^j_{(1)}\partial_i\beta_{jk} \\ &= \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^X(-1)^{i.k}X^i u^k_{(2)}(-(-1)^{i.k}\partial_k\alpha_i + \partial_i\alpha_k + \beta_{ki}) \\ &+\frac{1}{2}(-1)^X(-1)^{(j+1).(k+i)+(k+1).i}X^i u^k_{(1)}u^j_{(1)}((-1)^{j.(k+i)}\partial_j\beta_{ki} - (-1)^{i.k}\partial_k\beta_{ji} + \partial_i\beta_{jk})\end{aligned}$$

càd :

$$\iota(X)dF(\gamma) = \textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X(\iota(\ddot{\gamma},X)(-d\alpha+\beta-\theta d\alpha') + \frac{1}{2}\iota(X,\dot{\gamma},\dot{\gamma})(d\beta)$$

Ainsi, $dF = 0$ ssi $d\alpha = \beta$ et $d\alpha' = 0$ càd ssi $F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} u^k_{(2)}\alpha'_k\theta$ avec α' une 1 forme fermée.

Finalement, on en conclut :

Théorème 4.19. —

$$H^0_{[2]}(SLM) = H^1(M)$$

On regarde maintenant les fonctionnelles d'ordre 3. Elles s'écrivent :
$F = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} u^k_{(3)}\alpha_k(u) + (-1)^{(j+1).k}u^k_{(2)}u^j_{(1)}\beta_{jk}(u) + \frac{1}{6}(-1)^{(j+1).(k+l)+(k+1).l}u^l_{(1)}u^k_{(1)}u^j_{(1)}\eta_{jkl}(u).$

avec α_k, β_{jk} et η_{jkl} respectivement les coordonnées d'une 1 forme α, d'un 2-tenseur covariant β' et d'une 3-forme η sur M.

On décompose β' sous la forme $\beta' = g + \beta$ où g est une métrique et β une 2-forme sur M.

La fonctionnelle s'écrit aussi :

$$F(\gamma) = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \iota(\dddot{\gamma})\alpha + \iota(\ddot{\gamma},\dot{\gamma})(g+\beta) + \frac{1}{6}\iota(\dot{\gamma},\dot{\gamma},\dot{\gamma})\eta$$

On a :

$D_c(u^k_{(2)}\alpha_k) = u^k_{(3)}\alpha_k + (-1)^k u^k_{(2)}u^j_{(1)}\partial_j\alpha_k = u^k_{(3)}\alpha_k + (-1)^{(j+1).k}u^k_{(2)}u^j_{(1)}\frac{1}{2}((\partial_k\alpha_j + (-1)^{j.k}\partial_j\alpha_k) + ((-1)^{j.k}\partial_j\alpha_k - \partial_k\alpha_j)$

et

$D_c(\frac{1}{2}(-1)^{(j+1).k}u^k_{(1)}u^j_{(1)}\beta_{jk}) = (-1)^{(j+1).k}u^k_{(2)}u^j_{(1)}\beta_{jk} + \frac{1}{2}u^k_{(1)}u^j_{(1)}u^l_{(1)}\partial_l\beta_{jk} = \iota(\ddot{\gamma},\dot{\gamma})\beta + \frac{1}{6}\iota(\dot{\gamma},\dot{\gamma},\dot{\gamma})d\beta$

avec β_{jk} les coefficients de β.

Ainsi $F = 0$ ssi $g_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_k\alpha_j + (-1)^{j.k}\partial_j\alpha_k)$ et $\eta = d\beta$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned}
\iota(X)dF \quad = \quad & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} X^i_{(3)}\alpha_i + (-1)^{X+i.(k+1)} X^i u^k_{(3)} \partial_i \alpha_k + (-1)^{X+(j+1).i} X^i_{(2)} u^j_{(1)} (g_{ji} + \beta_{ji}) \\
& + (-1)^{(i+j+1).k} X^i_{(1)} u^k_{(2)} (g_{ik} + \beta_{ik}) + (-1)^{X+(i+j+1).k+i.j} X^i u^k_{(2)} u^j_{(1)} \partial_i((g_{jk} + \beta_{jk}) \\
& + \frac{1}{2}(-1)^{(j+1).(k+i)+(k+1).i} X^i_{(1)} u^k_{(1)} u^j_{(1)} \eta_{jki} + \\
& \frac{1}{6}(-1)^{X+(i+j+1).(k+l)+(k+1).l+i.(j+1)} X^i u^l_{(1)} u^k_{(1)} u^j_{(1)} \partial_i \eta_{jkl}
\end{aligned}$$

Et grâce à une intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned}
\iota(X)dF \quad = \quad & \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{X+i.(k+1)} X^i u^k_{(3)} (\partial_i \alpha_k + (-1)^{i.k} \partial_k \alpha_i - 2g_{ki}) + (-1)^{X+(j+1).(i+k)+i.k} \\
& X^i u^k_{(2)} u^j_{(1)} ((-1)^{i.(j+k)} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u^k \partial u^j} - (-1)^{i.k} \partial_k \beta_{ji} + (-1)^{j.(i+k)} \partial_j \beta_{ki} + \partial_i \beta_{jk} - \eta_{jki}) \\
& -(-1)^{X+(l+j+k+1).i+(l+k).j+(l+1).k} \frac{1}{6} X^i u^l_{(1)} u^k_{(1)} u^j_{(1)} \\
& ((-1)^{l.i} \partial_l \eta_{jki} - (-1)^{j.(i+k+l)} \partial_j \eta_{kli} + (-1)^{k.(i+l)} \partial_k \eta_{jli} - \partial_i \eta_{jkl})
\end{aligned}$$

Si on regarde le coefficient en $u^k_{(2)} u^j_{(1)}$, la condition de fermeture se traduit par :

$(-1)^{i.(j+k)} \dfrac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u^k \partial u^j} = (-1)^{i.k} \partial_k \beta_{ji} - (-1)^{j.(i+k)} \partial_j \beta_{ki} - \partial_i \beta_{jk} + \eta_{jki} = (\eta - d\beta)_{jki}$

Puisque le terme de gauche est symétrique en j k et le terme de droite antisymétrique, on a :

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial u^k \partial u^j} = 0$$

et

$$\eta = d\beta$$

Puisque les α_i sont les coordonnées d'une 1-forme, la première condition implique que $\alpha = 0$.

Les conditions provenant des termes en $X^i u^k_{(3)}$ et $X^i u^l_{(1)} u^k_{(1)} u^j_{(1)}$ eťant respectivement $2g_{ki} = \partial_i \alpha_k + (-1)^{i.k} \partial_k \alpha_i = 0$ et $d\eta = 0$, on a que les fonctionnelles fermées sont nulles.

Et ainsi :

Théorème 4.20. —

$$H^0_{[3]}(SLM) = 0$$

On peut relier ce résultat au résultat classique de Mokhov sur l'espace de cohomologie $H^0_{[2]}$ des formes homogènes d'ordre 2, voir le théorème 4.16.

4.3.4. $H^1_{[1]}(SLM)$ et $H^1_{[2]}(SLM)$. —

Pour les formes homogènes d'ordre 1, l'on a vu dans le paragraphe précédent que les 1-formes exactes sont de la forme :

$$\iota(X)dF = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+i}X^i u^k_{(1)}((-1)^{i.k}\partial_i\alpha_k - \partial_k\alpha_i)$$

càd les formes $\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+(j+1).i}X^i u^j_{(1)}\alpha_{ji}$ pour lesquelles le tenseur de coordonnées α_{ij} est une forme exacte.

Le calcul de $d\alpha$ donne (cf §4.2.2) :

$$\begin{aligned}\iota(X,Y)d\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}&(-1)^{X+Y}X^j((-1)^{j+i+Y^i.(j+1)}Y^i_{(1)}(\alpha_{ij}+(-1)^{i.j}\alpha_{ji})\\ &+(-1)^{(k+1).(i+j)+Y^i.j}Y^i u^k_{(1)}(-\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial u^j}+(-1)^{i.j}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial u^i}+(-1)^{k.(i+j)+j.i}\frac{\partial\alpha_{ji}}{\partial u^k})\end{aligned}$$

Donc $d\alpha = 0$ ssi la partie paire $\alpha_{ij} + (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$ est nulle et si la partie impaire $\alpha_{ij} - (-1)^{i.j}\alpha_{ji}$ est une 2-forme fermée.

Ainsi :

Théorème 4.21. —

$$H^1_{[1]}(SLM) = H^2(M)$$

Pour les formes homogènes d'ordre 2, d'après le paragraphe précédent, les 1-formes exactes s'écrivent :

$$\iota(X)dF = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^X(\iota(\dot{\dot{\gamma}},X)(-d\alpha+\beta-\theta d\alpha') + \iota(\iota(X),\dot{\gamma},\dot{\gamma})(d\beta)$$

et d'après le §4.2.3, les formes fermées s'écrivent :

$$\iota(X)\alpha = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X+i.j}X^i u^j_{(2)}(\alpha_{ji}+\theta\alpha'_{ji}) + (-1)^{X+(j+k).i+(j+1).k}X^i\frac{1}{2}u^k_{(1)}u^j_{(1)}\alpha_{jki}$$

avec les α'_{ij} les coordonnées d'une 2-forme fermée, les α_{ij} les coordonnées d'une 2-forme et les α_{ijk} les coordonnées de $d\alpha$.

Ainsi :

Théorème 4.22. —

$$H^1_{[2]}(SLM) = H^2(M)$$

4.3.5. Calcul de $H_{[1]}$. —

Comme pour les formes homogènes d'ordre 0, on peut calculer toute la cohomologie du complexe des formes homogènes d'ordre 1.

Théorème 4.23. —

$$\forall m \in \mathbb{N}, H^m_{[1]}(SLM) = H^{m+1}(M)$$

Démonstration. — D'après les résultats précédents, le résultat est vrai pour $m = 0, 1$ et 2.

Pour les formes homogènes d'ordre 1 de degré supérieur ou égal à 2, celles-ci s'écrivent de manière unique :

$$\iota(X_1, \cdots, X_k)\omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} \sum_{s=2}^{k} (-1)^{\sum_{n=1}^{k}(X_n.(1+i_n)+(X_n^{l_n}+i_n).(\sum_{p<n}(l_p+i_p))+i_n\sum_{p>n} l_p} X_1^{l_1}\cdots(X_s^{l_s})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\cdots1\cdots0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1} + (-1)^{\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{p<n} l_p+(p+1).\sum_{n=1}^{k} l_n} X_1^{l_1}\cdots X_k^{l_k} u^p_{(1)}\omega_{pl_k\cdots l_1}$$

Par rapport à la définition, donnée en début de chapitre, on a rajouté le terme $i_n \sum_{p>n} l_p$ par commodité dans la suite.

Si l'on échange deux vecteurs X_r and X_{r+1} avec $r > 1$, les coefficients $\omega^{0\cdots0}_{l_k\cdots l_1 p}$ se comportent comme des coefficients antisymmétriques.

$$\omega_{p\ l_k\cdots l_{r+1}l_r\cdots l_1} = -(-1)^{l_{r+1}.l_r}\omega_{p\ l_k\cdots l_r l_{r+1}\cdots l_1} \tag{4.3.1}$$

En effet, en ne gardant que les signes qui changent, l'on a :

$(-1)^{X_r.X_{r+1}+X_r^{l_r}.X_{r+1}^{l_{r+1}}}(-1)^{X_r^{l_r}.\sum_{p<r} l_p+X_{r+1}^{l_{r+1}}.\sum_{p<r+1} l_p} = (-1)^{X_r^{l_r}.\sum_{p<r+1} l_p+X_{r+1}^{l_{r+1}}.\sum_{p<r} l_p}(-1)^{l_{r+1}.l_r}$

Par contre pour les coefficients $\omega^{0\cdots1\cdots0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1}$, il faut distinguer deux cas, si $s \neq r$ et si $s = r$. Dans le premier cas, on a que les coefficients sont antisymétriques :

$$\omega^{0\cdots\ 1\ \cdots\ 0\ 0\cdots0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_{r+1}l_r\cdots l_1} = -(-1)^{l_{r+1}.l_r}\omega^{0\cdots\ 1\cdots\ 0\ \ 0\ \cdots\ 0}_{l_k\cdots l_s\cdots\ l_r l_{r+1}\cdots l_1} \tag{4.3.2}$$

et dans le deuxième

$$\omega^{0\cdots\ \ 1\ \ 0\cdots0}_{l_k\cdots l_{r+1}l_r\cdots l_1} = -(-1)^{l_{r+1}.l_r}\omega^{0\cdots\ 0\ 1\ \cdots\ 0}_{l_k\cdots l_r l_{r+1}\cdots l_1} \tag{4.3.3}$$

En effet, en ne gardant que les signes qui changent,

$$\begin{aligned}
& (-1)^{X_s^{l_s}.(\sum_{p<s}(l_p+i_p))+(X_{s+1}^{l_{s+1}}+1).(\sum_{p<s+1}(l_p+i_p))+\sum_{p>s+1} l_p} \\
& X_1^{l_1}\cdots X_s^{l_s}(X_{s+1}^{l_{s+1}})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\ \cdots\ 1\ 0\cdots0}_{l_k\cdots l_{s+1}l_s\cdots l_1} \\
= \; & (-1)^{X_{s+1}.X_s}(-1)^{X_s^{l_s}.(\sum_{p<s}(l_p+i_p)+(l_{s+1}+1))+(X_{s+1}^{l_{s+1}}+1).(\sum_{p<s+1}(l_p+i_p)+l_s)+\sum_{p>s+1} l_p+l_s} \\
& (-1)^{X_s^{l_s}.(l_{s+1}+1)+(X_{s+1}^{l_{s+1}}+1).l_s+l_s+(X_{s+1}^{l_{s+1}}+l_{s+1}).(X_s^{l_s}+l_s)}(-1)^{(X_{s+1}^{l_{s+1}}+1).X_s^{l_s}} \\
& X_1^{l_1}\cdots(X_{s+1}^{l_{s+1}})_{(1)}X_s^{l_s}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\ \cdots\ 1\ 0\cdots0}_{l_k\cdots l_{s+1}l_s\cdots l_1} \\
= \; & (-1)^{X_{s+1}.X_s}(-1)^{X_s^{l_s}.(\sum_{p<s}(l_p+i_p)+(l_{s+1}+1))+(X_{s+1}^{l_{s+1}}+1).(\sum_{p<s+1}(l_p+i_p)+l_s)+\sum_{p>s+1} l_p+l_s} \\
& (-1)^{l_s.l_{s+1}}X_1^{l_1}\cdots(X_{s+1}^{l_{s+1}})_{(1)}X_s^{l_s}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\ \cdots\ 1\ 0\cdots0}_{l_k\cdots l_{s+1}l_s\cdots l_1}
\end{aligned}$$

De la relation 4.3.3 on déduit que tous les coefficients sont déterminés par les coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}$ par la relation :

$$\omega^{0\cdots1\cdots\ 0\ 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_2 l_1} = (-1)^{s+l_s.\sum_{1<n<s} l_n}\omega^{0\cdots0\cdots\ 0\ 1\ 0}_{l_k\cdots\widehat{l_s}\cdots l_2 l_s l_1} \tag{4.3.4}$$

D'aprés 4.3.2, ces coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}$ sont antisymétriques en $l_k, \cdots, l_3$.

Montrons qu'ils sont symétriques en l_2, l_1.

En effet, en omettant le signe

$$(-1)^{\sum_{n=3}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.(\sum_{p<n}(l_p)+1)+X_1+(X_2^{l_2}+1).l_1+\sum_{p>2}l_p)}$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{1|1}} X_1^{l_1}(X_2^{l_2})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}\\
= &-\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X_1^{l_1}.(X_2^{l_2}+1)+X_2^{l_2}}X_2^{l_2}((X_1^{l_1})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}\\
&+\sum_{s=3}^{k}(-1)^{\sum_{n<s}X_n^{l_n}}X_1^{l_1}\cdots(X_s^{l_s})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1})\\
&+(-1)^{X_1^{l_1}.(X_2^{l_2}+1)+X_2^{l_2}}(-1)^{\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}}X_1^{l_1}\cdots X_s^{l_s}\cdots X_k^{l_k}u^p_{(1)}\partial_p(\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1})
\end{aligned}$$

Et ainsi, en échangeant X^1 et X^2, on a :

$$\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_2}=(-1)^{l_1.l_2}\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1} \tag{4.3.5}$$

car $(-1)^{X_1^{l_1}.(X_2^{l_2}+1)+X_2^{l_2}}(-1)^{X_1+(X_2^{l_2}+1).l_1+\sum_{p>2}l_p}=(-1)^{X_1.X_2}(-1)^{X_2+(X_1^{l_1}+1).l_2+\sum_{p>2}l_p}(-1)^{l_1.l_2}$

Ainsi que :

$$\omega^{0\cdots 1\cdots\ 0\ 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1 l_2}=\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_2}-(-1)^{l_1.l_2}\omega^{0\cdots 1\cdots\ 0\ 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_2 l_1} \tag{4.3.6}$$

car $(-1)^{\sum_{n=3}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.(\sum_{p<n}l_p+1)+X_1+(X_2^{l_2}+1).l_1+\sum_{p>2}l_p)+X_1^{l_1}.(X_2^{l_2}+1)+X_2^{l_2}+\sum_{n<s}X_n^{l_n}}=$
$(-1)^{X_2+X_1+X_1^{l_1}.l_2+\sum_{2<n<s}(X_n+X_n^{l_n}.(\sum_{p<n}l_p)+X_s+(X_s^{l_s}+1).\sum_{p<s}l_p+\sum_{n>s}(X_n+X_n^{l_n}.(\sum_{p<n}l_p+1))+\sum_{p>s}l_p}$
$(-1)^{X_1.X_2}(-1)^{l_1.l_2}$

et

$$\omega_{pl_k\cdots l_1 l_2}=-(-1)^{l_1.l_2}\omega_{pl_k\cdots l_2 l_1}+(-1)^{p.\sum_{n=1}^{k}l_n}\partial_p(\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_2}) \tag{4.3.7}$$

On a ainsi que $\omega^{0\cdots 1\cdots\ 0\ 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1 l_2}=(-1)^{l_s.l_2+(l_s+l_2).\sum_{n<s}l_n}\omega^{0\cdots 1\cdots\ 0\ 0}_{l_k\cdots l_2\cdots l_1 l_s}$ càd sont “symétriques“ en l_s et l_2.

On calcule maintenant $d\omega$, on a :

$$
\begin{aligned}
&(-1)^k\iota(X_0)\iota(X_1)\cdots\iota(X_k)d(\omega)\\
=\;& \int_{\mathbb{S}^{1|1}}\sum_{t=0}^{k}(-1)^{X_t+t+X_t.\sum_{n<t}X_n+X_t^{l_t}.\sum_{n<t}(X_n^{l_n}+i_n)+l_t.\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n^{l_n}+i_n)}\\
&\sum_{\substack{s=2 \text{ si } t=0\\ s=1,s\neq t \text{ si } t>0}}^{k}(-1)^{\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n.(1+i_n)+(X_n^{l_n}+i_n).(\sum_{\substack{p<n\\p\neq t}}(l_p+i_p))+i_n\sum_{\substack{p>n\\p\neq t}}l_p}\\
&X_0^{l_0}\cdots X_t^{l_t}\cdots(X_s^{l_s})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\partial_{l_t}(\omega^{0\cdots\;1\cdots\;0\cdots0}_{l_k\cdots l_s\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0})\\
&+\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t+X_t.\sum_{n<t}X_n+(X_t^{l_t}+1).\sum_{n<t}X_n^{l_n}+(l_t+1).\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}X_n^{l_n}}\\
&(-1)^{\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n+(X_n)^{l_n}.\sum_{\substack{p<n\\p\neq t}}l_p+(l_t+1).\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}l_n}X_0^{l_0}\cdots(X_t^{l_t})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega_{l_tl_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0}\\
&+\sum_{t=0}^{k}(-1)^{X_t+t+X_t.\sum_{n<t}X_n+X_t^{l_t}.\sum_{n<t}(X_n^{l_n})+l_t.(\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n^{l_n})+p+1)}\\
&(-1)^{\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n+(X_n)^{l_n}.\sum_{\substack{p<n\\p\neq t}}l_p+(p+1).\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}l_n}X_0^{l_0}\cdots X_t^{l_t}\cdots X_k^{l_k}u^p_{(1)}\partial_{l_t}(\omega_{pl_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0})
\end{aligned}
$$

Et par une intégration par partie :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}}(-1)^{\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{0<p<n}l_p+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}l_n}\\
&(X_0^{l_0})_{(1)}X_1^{l_1}\cdots X_k^{l_k}\omega_{l_0l_k\cdots l_1}\\
=\;&-\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{X_0^{l_0}+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}}(-1)^{\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{0<p<n}l_p+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}l_n}X_0^{l_0}\\
&(\sum_{s=1}^{k}(-1)^{\sum_{n<s}X_n^{l_n}}X_1^{l_1}\cdots(X_s^{l_s})_{(1)}\cdots X_k^{l_k}\omega_{l_0l_k\cdots l_1}\\
&\qquad\qquad+(-1)^{\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}}X_1^{l_1}\cdots X_k^{l_k}u^p_{(1)}\partial_p(\omega_{l_0l_k\cdots l_1}))
\end{aligned}
$$

Maintenant, on a aussi que :

$$
\begin{aligned}
&X_t+t+X_t.\textstyle\sum_{n<t}X_n+X_t^{l_t}.\sum_{n<t}(X_n^{l_n}+i_n)+l_t.\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n^{l_n}+i_n)\equiv\\
&\qquad X_t+X_t^{l_t}.\textstyle\sum_{n<t}(i_n+l_n)+l_t.\sum_{n>t}^{k}(X_n^{l_n}+i_n)+l_t.\sum_{n<t}i_n+t+l_t.\sum_{n<t}l_n \quad [2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s+(X_s).\textstyle\sum_{n<s}X_n+(X_s^{l_s}+1).\sum_{n<s}X_n^{l_n}+(l_s+1).\sum_{\substack{n=0\\n\neq t}}^{k}(X_n^{l_n}+l_n)\equiv\\
&\qquad\qquad (l_s+1).\textstyle\sum_{n>s}X_n^{l_n}+(X_s^{l_s}+1).\sum_{n<s}l_n+\sum_{n>s}^{k}l_n+s+l_s.\sum_{n>s}l_n \quad [2]
\end{aligned}
$$

et

$$
X_0^{l_0}+(l_0+1).\textstyle\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}+\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{0<p<n}l_p+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}l_n)+\sum_{n<s}X_n^{l_n}\equiv
$$

$\sum_{n=0}^{k}(X_n.(1+i_n)+(X_n^{l_n}+i_n).\sum_{p<n}(l_p+i_p)+\sum_{n<s}^{k}l_n)+l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n$ [2]

avec $i_0=0$.

On en déduit que :

si $s>1$,

(4.3.8)
$$(-1)^k(d\Omega)^{0\cdots\ 1\ \cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_0}=\sum_{\substack{t=0\\ t\neq s}}(-1)^{t+l_t.\sum_{n<t}l_n}\partial_{l_t}(\omega^{0\cdots\ 1\cdots\ 0\cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots \widehat{l_t}\cdots l_0})+(-1)^{s+l_s.\sum_{n>s}l_n}\omega_{l_sl_k\cdots\widehat{l_s}\cdots l_0}$$
$$-(-1)^{l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n}\omega_{l_0l_k\cdots l_1}$$

et si $s=1$,

$$(4.3.9)\quad (-1)^k(d\Omega)^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1l_0}=\sum_{t>1}(-1)^{t+l_t.\sum_{n<t}l_n}\partial_{l_t}(\omega^{0\cdots\ 0\cdots 1\ 0}_{l_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_1l_0})-(-1)^{l_1.\sum_{n>1}l_n}\omega_{l_1l_k\cdots\widehat{l_1}l_0}$$
$$-(-1)^{l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n}\omega_{l_0l_k\cdots l_1}$$

De plus, :

$X_0^{l_0}+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}+\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{0<p<n}l_p+(l_0+1).\sum_{n=1}^{k}l_n)+\sum_{n=1}^{k}X_n^{l_n}=\sum_{n=0}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{p<n}l_p)+(p+1).\sum_{n=0}^{k}l_n+p.\sum_{n=0}^{k}l_n+l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n$

et

$s+X_s.\sum_{n<s}X_n+(X_s^{l_s}+1).\sum_{n<s}X_n^{l_n}+(l_s+1).\sum_{\substack{n=0\\ n\neq t}}^{k}(X_n^{l_n}+l_n)=(l_s+1).\sum_{n>s}X_n^{l_n}+(X_s^{l_s}+1).\sum_{n<s}l_n+\sum_{n>s}^{k}l_ns+l_s.\sum_{n>s}l_n$

et ainsi :

(4.3.10)
$$(-1)^k(d\Omega)_{pl_k\cdots l_0}=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t+l_t\sum_{n<t}l_n}\partial_{l_t}(\omega_{pl_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0})-(-1)^{p.\sum_{n=0}^{k}l_n+l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n}\partial_p(\omega_{l_0l_k\cdots l_1})$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.24. —
Soit ω une forme différentielle homogène d'ordre 1 sur SLM. La forme ω est fermée ssi

$$(-1)^{l_1.\sum_{n>1}l_n}\omega_{l_1l_k\cdots\widehat{l_1}l_0}+(-1)^{l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n}\omega_{l_0l_k\cdots l_1}=\sum_{t>1}(-1)^{t+l_t.\sum_{n<t}l_n}\partial_{l_t}(\omega^{0\cdots\ 0\cdots 1\ 0}_{l_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_1l_0})$$

et

$$0=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{t+l_t\sum_{n<t}l_n}\partial_{l_t}(\omega_{pl_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0})-(-1)^{p.\sum_{n=0}^{k}l_n+l_0.\sum_{n=1}^{k}l_n}\partial_p(\omega_{l_0l_k\cdots l_1})$$

En effet, d'après 4.3.4, si les $(d\Omega)^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0}$ sont nuls, tous les $(d\Omega)^{0\cdots\ 1\ \cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_0}$ aussi.

Grâce aux relations 4.3.1 et 4.3.7, la première équation de la proposition 4.24 s'écrit aussi :

$$(-1)^{k+(l_1+l_0).\sum_{n>1} l_n}\omega_{l_1 l_0 l_k\cdots l_2} + (-1)^{k+l_0.l_1+(l_0+l_1).\sum_{n>1}^{k} l_n}\omega_{l_0 l_1 l_k\cdots l_2} = \sum_{t>1}(-1)^{t+l_t.\sum_{n<t} l_n}\partial_{l_t}(\omega^{0\cdots\ 0\cdots 1\ 0}_{l_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_1 l_0})$$

Proposition 4.25. — *Les formes différentielles Ω fermées homogènes d'ordre 1 sur SLM telle que les coefficients $\omega^{0\cdots 1\cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1}$ soient tous nuls sont en bijection avec les $k+1$ formes différentielles fermées ω sur M.*

La bijection est donnée par :

$$\iota(X_1,\cdots,X_k)\Omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{\sum X_i}\iota(X_1,\cdots,X_k,\dot{\gamma})\omega$$

Démonstration. — Considérons deux formes fermées avec les mêmes coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}$ et regardons la différence.

C'est une forme fermée qui s'écrit :

$$\iota(X_1)\cdots\iota(X_k)\Omega = \textstyle\int_{\mathbb{S}^{1|1}}(-1)^{\sum_{n=1}^{k}(X_n+X_n^{l_n}.\sum_{p<n} l_p+(p+1).\sum_{n=1}^{k} l_n} X_1^{l_1}\cdots X_k^{l_k} u^p_{(1)}\omega_{p l_k\cdots l_1}$$

Avec les coefficients $\omega_{p l_k\cdots l_1}$ antisymétriques en $l_k,\cdots,l_1$.

De plus, dans un changement de variables tous les $\omega_{p l_k\cdots l_1}$ se tranforment comme les coefficients d'un $k+1$-tenseur covariant.

D'après la proposition 4.24, les conditions de fermeture s'écrivent alors :

$$\omega_{l_0 l_s l_k\cdots\widehat{l_s}\cdots l_1} = -(-1)^{l_s.l_0}\omega_{l_s l_0 l_k\cdots\widehat{l_s}\cdots l_1}$$

et

$$0 = \sum_{t=0}^{k}(-1)^{t+l_t\sum_{n<t} l_n}\partial_{l_t}(\omega_{p l_k\cdots\widehat{l_t}\cdots l_0}) - (-1)^{p.\sum_{n=0}^{k} l_n+l_0.\sum_{n=1}^{k} l_n}\partial_p(\omega_{l_0 l_k\cdots l_1})$$

Autrement dit les $\omega_{p l_k\cdots l_1}$ sont complètement antisymétriques. Les $\omega_{p l_k\cdots l_1}$ sont donc les coefficients d'une $k+1$ forme et la deuxième équation montre que cette forme est fermée sur M.

□

La proposition suivante montre alors que modulo une forme exacte, toute forme a ses coefficients $\omega^{0\cdots 1\cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1}$ nuls.

Proposition 4.26. — *Toute forme homogène d'ordre 1 est cohomologue à une forme ω homogène d'ordre 1 telle que les coefficients $\omega^{0\cdots 1\cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1}$ soient tous nuls.*

Démonstration. — Pour cela, d'après 4.3.4, il suffit de montrer que si l'on fixe les coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0}$, on peut construire de manière canonique une forme exacte avec pour coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0}$, ceux que l'on s'est fixé.

Regardons les coefficients $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0}$. Dans un changement de variables, ils se comportent comme les coefficients d'un k-tenseur covariant. Comme ceux-ci sont complètement antisymétriques en les indices $l_k \cdots l_2$ et symétriques en $l_1 l_0$, ce sont les coordonnées d'un tenseur qui est la somme de produits tensoriels de $(k-2)$-formes avec des pseudo-métriques (2-tenseur covariant).

Il suffit donc de montrer notre résultat pour $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_2 l_1}$ les coefficients d'un produit $\omega \otimes g$ avec ω une $k-2$-forme et g une pseudo-métrique, càd : $\omega^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0} = \omega_{l_k\cdots l_2} g_{l_1 l_0}$.

Il suffit alors de choisir la forme Ω définie par :

$$\iota(X^1)\cdots\iota(X^k)\Omega = \int_{\mathbb{S}^{1|1}} (-1)^{\sum_{n=1}^k (X^n + (X^n)^{l_n}.\sum_{p<n} l_p + (p+1).\sum_{n=1}^k l_n} (X^1)^{l_1}\cdots(X^k)^{l_k} u^p_{(1)} \omega_{pl_k\cdots l_1}$$

avec $\omega_{pl_k\cdots l_1} = -(-1)^{(p+l_k).\sum_{n=1}^{k-1} l_n} \dfrac{1}{2}\omega_{l_k\cdots l_2} g_{pl_1}$.

En effet, d'après 4.3.9 on a :

$$\begin{aligned}(-1)^k (d\Omega)^{0\cdots\ 1\ 0}_{l_k\cdots l_1 l_0} &= -(-1)^{k+(l_1+l_0).\sum_{n>1} l_n}\omega_{l_1 l_0 l_k\cdots \widehat{l_1}} - (-1)^{k+l_0.l_1+(l_0+l_1).\sum_{n>1}^k l_n}\omega_{l_0 l_1 l_k\cdots l_2} \\ &= \omega_{l_k\cdots l_2} g_{l_1 l_0}\end{aligned}$$

□

Ceci montre que l'espace des k-formes fermées homogènes d'ordre 1 sur SLM est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des $k+1$-formes fermées sur M.

De plus, pour déterminer les k-formes exactes, on peut considérer des antécédents dont les coefficients $\omega^{0\cdots 1\cdots 0}_{l_k\cdots l_s\cdots l_1}$ soient tous nuls et donc les $\omega_{pl_{k-1}\cdots l_1}$ sont les coefficients de k formes sur M.

D'après 4.3.10, on a alors qu'une k forme homogène d'ordre 1 sur SLM est exacte ssi les $\Omega_{pl_k\cdots l_1}$ sont les coordonnées d'une $k+1$-forme exacte sur M. Donc l'espace des k-formes exactes homogènes d'ordre 1 sur SLM est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des $k+1$-formes exactes sur M, ce qui conclut la démonstration du théorème.

□

BIBLIOGRAPHIE

[ABF03] B. Agrebaoui & N. Ben Fraj – « On the cohomology of the Lie superalgebra of contact vector fields on $S^{1/1}$ », *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **72** (2003), no. 6, p. 365–375 (2004).

[AL09] M. Asorey & P. M. Lavrov – « Fedosov and Riemannian supermanifolds », *J. Math. Phys.* **50** (2009), no. 1, p. 013530, 16.

[Arn89] V. I. Arnold – *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, Translated from the 1974 Russian original by K. Vogtmann and A. Weinstein, Corrected reprint of the second (1989) edition.

[Bar89] C. Bartocci – « Foundations of super vector bundles », Differential geometry and its applications (Dubrovnik, 1988), Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989, p. 15–21.

[Bat79] M. Batchelor – « The structure of supermanifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **253** (1979), p. 329–338.

[Bat80] ———, « Two approaches to supermanifolds », *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980), no. 1, p. 257–270.

[BBHR91] C. Bartocci, U. Bruzzo & D. Hernández Ruipérez – *The geometry of supermanifolds*, Mathematics and its Applications, vol. 71, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[BC99] F. Bourgeois & M. Cahen – « A variational principle for symplectic connections », *J. Geom. Phys.* **30** (1999), no. 3, p. 233–265.

[BCC11] L. Balduzzi, C. Carmeli & G. Cassinelli – « Super vector bundles », *Journal of Physics: Conference Series* **284** (2011), no. 1, p. 012010.

[BCG+06] P. Bieliavsky, M. Cahen, S. Gutt, J. Rawnsley & L. Schwachhöfer – « Symplectic connections », *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006), no. 3, p. 375–420.

[BD05] J.-L. Basdevant & J. Dalibard – *Quantum mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Corrected second printing, With 1 CD-ROM by Manuel Joffre.

[Bry08] J.-L. Brylinski – *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008, Reprint of the 1993 edition.

[DC92] M. P. Do Carmo – « Riemannian geometry », (1992), p. xiv+300, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[DEF+99] P. Deligne, P. Etingof, D. S. Freed, L. C. Jeffrey, D. Kazhdan, J. W. Morgan, D. R. Morrison & E. Witten – *Quantum fields and strings: a course for mathematicians. Vol. 1, 2*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997.

[DeW92] B. DeWitt – *Supermanifolds*, second éd., Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Dub01] B. Dubrovin, Y. Zhang – « Normal forms of hierarchies of integrable pdes, frobenius manifolds and gromov - witten invariants, arxiv 0108160v1 », (2001), p. 1–187.

[Dum08] F. Dumitrescu – « Superconnections and parallel transport », *Pacific J. Math.* **236** (2008), no. 2, p. 307–332.

[GD81] I. M. Gelfand & I. J. Dorfman – « Hamiltonian operators and infinite-dimensional Lie algebras », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **15** (1981), no. 3, p. 23–40.

[God73] R. Godement – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1973, Troisième édition revue et corrigée, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252.

[Goe08] O. Goertsches – « Riemannian supergeometry », *Math. Z.* **260** (2008), no. 3, p. 557–593.

[GR07] L. Guieu & C. Roger – *L'algèbre et le groupe de Virasoro*, Les Publications CRM, Montreal, QC, 2007, Aspects géométriques et algébriques, généralisations. [Geometric and algebraic aspects, generalizations], With an appendix by Vlad Sergiescu.

[Ham82] R. S. Hamilton – « The inverse function theorem of Nash and Moser », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), no. 1, p. 65–222.

[Hél08] F. Hélein – « A representation formula for maps on supermanifolds », *J. Math. Phys.* **49** (2008), no. 2, p. 023506, 19.

[Kas03] M. Kashiwara – *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 217, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003, Translated from the 2000 Japanese original by Mutsumi Saito, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[KM97] A. Kriegl & P. W. Michor – *The convenient setting of global analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Kos77] B. Kostant – « Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization », (1977), p. 177–306. Lecture Notes in Math., Vol. 570.

[Lei80] D. A. Leites – « Introduction to the theory of supermanifolds », *Uspekhi Mat. Nauk* **35** (1980), no. 1(211), p. 3–57, 255.

[Lei83] ———, *Supermanifold theory*, 1983.

[Lic50] A. Lichnerowicz – *Eleménts de Calcul Tensoriel*, Librairie Armand Colin, Paris, 1950.

[LR08] P. M. Lavrov & O. V. Radchenko – « Symplectic geometries on supermanifolds », *Internat. J. Modern Phys. A* **23** (2008), no. 9, p. 1337–1350.

[Man88] Y. I. Manin – *Gauge field theory and complex geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 289, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translated from the Russian by N. Koblitz and J. R. King.

[MD08] J.-P. Michel & C. Duval – « On the projective geometry of the supercircle: a unified construction of the super cross-ratio and Schwarzian derivative », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), no. 14, p. Art. ID rnn054, 47.

[Mic] J.-P. Michel – « Quantification conformément équivariante des fibrés supercotangents », Thèse, http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/55/76/PDF/These.pdf.

[Min96] R. A. Minlos – *Felix Alexandrovich Berezin (a brief scientific biography)*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[ML98] S. Mac Lane – *Categories for the working mathematician*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Mok95] O. I. Mokhov – « Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations », **170** (1995), p. 121–151.

[Mok96] ———, « On complex homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds, and their cohomology groups », *Uspekhi Mat. Nauk* **51** (1996), no. 2(308), p. 141–142.

[Mok98a] ———, « On cohomology groups of complexes of homogeneous forms on loop spaces of smooth manifolds », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **32** (1998), no. 3, p. 22–34, 95.

[Mok98b] ———, « Symplectic and Poisson structures on loop spaces of smooth manifolds, and integrable systems », *Uspekhi Mat. Nauk* **53** (1998), no. 3(321), p. 85–192.

[Pau10] F. Paugam – « Towards the mathematics of quantum field theory », http://www.math.jussieu.fr/ fpaugam/documents/enseignement/master-mathematical-physics.pdf, 2010, p. 1–359.

[Rog06] C. Roger – « Hommage à Feliks A. Berezin », *Gaz. Math.* (2006), no. 110, p. 23–30.

[Rog07] A. Rogers – *Supermanifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007, Theory and applications.

[Shi07] M. Shifman (éd.) – *Felix Berezin*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007, Life and death of the mastermind of supermathematics.

[Sou70] J.-M. Souriau – *Structure des systèmes dynamiques*, Maıtrises de mathématiques, Dunod, Paris, 1970.

[Sou85] ———, *Mécanique classique et géométrie symplectique*, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1985.

[Sta05] A. Stacey – *The differential topology of loop spaces*, http://arxiv.org/abs/math/0510097, 2005.

[Tuy10] G. M. Tuynman – « Super symplectic geometry and prequantization », *J. Geom. Phys.* **60** (2010), no. 12, p. 1919–1939.

[Var04] V. S. Varadarajan – *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 11, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2004.

[Wei77] A. Weinstein – *Lectures on symplectic manifolds*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of North Carolina, March 8–12, 1976, Regional Conference Series in Mathematics, No. 29.

[Wur95] T. Wurzbacher – « Symplectic geometry of the loop space of a Riemannian manifold », *J. Geom. Phys.* **16** (1995), no. 4, p. 345–384.

[Zwi09] B. Zwiebach – *A first course in string theory*, second éd., Cambridge University Press, Cambridge, 2009, With a foreword by David Gross.